Основы математической логики: 2/8

Станислав Олегович Сперанский

ФМКН СПбГУ

Санкт-Петербург 2021

Здесь используются следующие схемы аксиом:

I1. $\phi \to (\psi \to \phi)$;

I2. $(\phi \to (\psi \to \chi)) \to ((\phi \to \psi) \to (\phi \to \chi))$;

C1. $\phi \wedge \psi \to \phi$;

C2. $\phi \wedge \psi \to \psi$;

C3. $\phi \to (\psi \to \phi \wedge \psi)$;

D1. $\phi \to \phi \vee \psi$;

D2. $\psi \to \phi \vee \psi$;

D3. $(\phi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to (\phi \vee \psi \to \chi))$;

N1. $(\phi \to \psi) \to ((\phi \to \neg\psi) \to \neg\phi)$;

N2. $\neg\phi \to (\phi \to \psi)$;

N3. $\phi \vee \neg\phi$.

Помимо них имеется ровно одно правило вывода, именуемое *modus ponens*:

$$\frac{\phi \qquad \phi \to \psi}{\psi}\ (\mathtt{MP})$$

Пусть $\Gamma \subseteq$ Form. Под выводом из Γ в данном гильбертовском исчислении понимают конечную последовательность

$$\phi_0, \ \ldots, \ \phi_n$$

(где $n \in \mathbb{N}$) элементов Form такую, что для каждого $i \in \{0, \ldots, n\}$ выполнено одно из следующих условий:

- ϕ_i является аксиомой;
- ϕ_i является элементом Γ;
- существуют $\{j, k\} \subseteq \{0, \ldots, i-1\}$ такие, что ϕ_k есть $\phi_j \to \phi_i$.

При этом ϕ_n называют заключением рассматриваемого вывода, а элементы Γ — его гипотезами.

Для $\Gamma \cup \{\phi\} \subseteq$ Form запись $\Gamma \vdash \phi$ означает, что существует вывод из Γ с заключением ϕ. Вместо $\varnothing \vdash \phi$ обычно пишут $\vdash \phi$.

В качестве простейших свойств $\vdash$ выступают:

- если $\Gamma \subseteq \Delta$ и $\Gamma \vdash \phi$, то $\Delta \vdash \phi$; (монотонность)
- если $\Delta \vdash \psi$ для всех $\psi \in \Gamma$, и $\Gamma \vdash \phi$, то $\Delta \vdash \phi$; (транзитивность)
- если $\Gamma \vdash \phi$, то $\Delta \vdash \phi$ для нек. конечного $\Delta \subseteq \Gamma$. (компактность)

Замечание

Ясно, что $\vDash$ монотонно и транзитивно. Более того, хотя компактность $\vDash$ отнюдь не очевидна, она будет следовать из совпадения $\vdash$ и $\vDash$.

Пример

Покажем, что $\vdash \phi \vee \psi \to \psi \vee \phi$:

1.	$(\phi \to \psi \vee \phi) \to ((\psi \to \psi \vee \phi) \to (\phi \vee \psi \to \psi \vee \phi))$	D3
2.	$\phi \to \psi \vee \phi$	D2
3.	$\psi \to \psi \vee \phi$	D1
4.	$(\psi \to \psi \vee \phi) \to (\phi \vee \psi \to \psi \vee \phi)$	из 2, 1; MP
5.	$\phi \vee \psi \to \psi \vee \phi$	из 3, 4; MP.

Пример

Покажем, что $\{\phi \wedge \psi\} \vdash \psi \wedge \phi$:

1.	$\psi \to (\phi \to \psi \wedge \phi)$	C3
2.	$\phi \wedge \psi \to \psi$	C2
3.	$\phi \wedge \psi \to \phi$	C1
4.	$\phi \wedge \psi$	гипотеза
5.	ψ	из 4, 2; MP
6.	ϕ	из 4, 3; MP
7.	$\phi \to \psi \wedge \phi$	из 5, 1; MP
8.	$\psi \wedge \phi$	из 6, 7; MP.

Вместе с тем не совсем ясно, можно ли получить $\vdash \phi \wedge \psi \to \psi \wedge \phi$.

Пример

По (довольно контринтуитивной) традиции $\phi \to \phi$ отсутствует среди схем аксиом. Тем не менее, $\vdash \phi \to \phi$:

1.	$(\phi \to ((\phi \to \phi) \to \phi)) \to ((\phi \to (\phi \to \phi)) \to (\phi \to \phi))$	I2
2.	$\phi \to ((\phi \to \phi) \to \phi)$	I1
3.	$\phi \to (\phi \to \phi)$	I1
4.	$(\phi \to (\phi \to \phi)) \to (\phi \to \phi)$	из 2, 1
5.	$\phi \to \phi$	из 3, 4.

Заметим, что при этом $\{\phi\} \vdash \phi$ выполнено очевидным образом.

Теорема (о дедукции)

Для любых $\Gamma \cup \{\phi, \psi\} \subseteq \mathrm{Form}$,

$$\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \psi \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \vdash \phi \to \psi.$$

Доказательство.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Пусть $\Gamma \vdash \phi \to \psi$. Зафиксируем какой-нибудь вывод

$$\phi_0, \quad \ldots, \quad \phi_n \;=\; \phi \to \psi$$

из Γ. Тогда, как легко убедиться,

$$\phi_0, \quad \ldots, \quad \phi_n, \quad \phi, \quad \psi$$

будет выводом из $\Gamma \cup \{\phi\}$. Стало быть, $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \psi$. . . .

Доказательство (продолжение).

$\boxed{\Longrightarrow}$ Пусть $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \psi$. Зафиксируем какой-нибудь вывод

$$\psi_0, \ \ldots, \ \psi_n \ = \ \psi$$

из $\Gamma \cup \{\phi\}$. Покажем индукцией по $i \in \{0, \ldots, n\}$, что $\Gamma \vdash \phi \to \psi_i$.

Возможны следующие случаи.

- Пусть ψ_i — аксиома или элемент Γ. Тогда

$$\psi_i \to (\phi \to \psi_i), \ \ \psi_i, \ \ \phi \to \psi_i$$

будет выводом из $\varnothing$ или Γ. Стало быть, $\Gamma \vdash \phi \to \psi_i$.

- Пусть $\psi_i = \phi$. Как мы знаем, $\vdash \phi \to \phi$, тем более $\Gamma \vdash \phi \to \phi$.

...

Доказательство (продолжение).

- Пусть ψ_i получено из предшествующих ψ_j и $\psi_k = \psi_j \to \psi_i$ по MP. Тогда можно построить такой «квазивывод» из Γ:

1.	$(\phi \to (\psi_j \to \psi_i)) \to ((\phi \to \psi_j) \to (\phi \to \psi_i))$	I2
2.	$\phi \to (\psi_j \to \psi_i)$	и.г.
3.	$\phi \to \psi_j$	и.г.
4.	$(\phi \to \psi_j) \to (\phi \to \psi_i)$	из 2, 1
5.	$\phi \to \psi_i$	из 3, 4.

Стало быть, $\Gamma \vdash \phi \to \psi_i$.

В частности, при $i := n$ мы имеем $\Gamma \vdash \phi \to \psi_n$, т.е. $\Gamma \vdash \phi \to \psi$. $\square$

Для удобства введём обозначения

$$\top \;:=\; p_\star \to p_\star \quad \text{и} \quad \bot \;:=\; \neg\top,$$

где $p_\star$ — фиксированная пропозициональная переменная.

Следствие

Для любых $\Gamma \cup \{\phi\} \subseteq \mathrm{Form}$,

$$\Gamma \vdash \phi \quad \Longleftrightarrow \quad \vdash \bigwedge_{i=1}^{n} \psi_i \to \phi \quad \textit{для некот.}\ \{\psi_1, \dots, \psi_n\} \subseteq \Gamma.$$

(В случае $n = 0$ соотв. конъюнкция отождествляется с $\top$.)

Замечание

Для $\models$ имеет место аналогичное утверждение, но для его доказательства требуется компактность $\models$, разумеется.

Доказательство.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Пусть $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \subseteq \Gamma$ и $\vdash \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n \to \phi$. Тогда

$$\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \vdash \phi,$$

поскольку $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \vdash \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n$ (в силу C3); тем более $\Gamma \vdash \phi$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Пусть $\Gamma \vdash \phi$. Значит, $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \vdash \phi$ для некот. $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \subseteq \Gamma$. Тогда

$$\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n \vdash \phi,$$

поскольку $\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n \vdash \psi_i$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$ (ввиду C1-2), и мы получаем $\vdash \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n \to \phi$ по теореме дедукции. □

Пример

Как мы знаем, $\{\phi \wedge \psi\} \vdash \psi \wedge \phi$, а значит, в силу теоремы дедукции, $\vdash \phi \wedge \psi \to \psi \wedge \phi$.

Пример

Нетрудно убедиться, что $\{\phi \to \psi, \phi \to \neg\psi, \phi\} \vdash \chi$:

1.	$\neg\psi \to (\psi \to \chi)$	N2
2.	ϕ	гипотеза
3.	$\phi \to \neg\psi$	гипотеза
4.	$\neg\psi$	из 1, 2
5.	$\psi \to \chi$	из 4, 1
6.	$\phi \to \psi$	гипотеза
7.	ψ	из 2, 6
8.	χ	из 7, 5.

Значит, $\vdash (\phi \to \psi) \to ((\phi \to \neg\psi) \to (\phi \to \chi))$.

Корректность

Лемма

Всякая аксиома г.и. для кл. проп. логики общезначима. □

Теорема (о корректности)

Для любых $\Gamma \cup \{\phi\} \subseteq \mathrm{Form}$,

$$\Gamma \vdash \phi \quad \Longrightarrow \quad \Gamma \vDash \phi.$$

Доказательство.

Пусть $\Gamma \vdash \phi$. Зафиксируем какой-нибудь вывод

$$\phi_0, \ \ldots, \ \phi_n \ = \ \phi$$

из Γ. Рассмотрим произвольную оценку v такую, что $v \Vdash \psi$ для всех $\psi \in \Gamma$. Покажем индукцией по $i \in \{0, \ldots, n\}$, что $v \Vdash \phi_i$. ...

Доказательство (продолжение).

Возможны следующие случаи.

- Пусть ϕ_i — аксиома. Тогда $\vDash \phi_i$, а потому $v \Vdash \phi_i$.
- Пусть ϕ_i — элемент Γ. Тогда, очевидно, $v \Vdash \phi_i$.
- Пусть ϕ_i получается из предшествующих ϕ_j и $\phi_k = \phi_j \to \phi_i$ по MP. Ввиду индукционной гипотезы,

  $$v \Vdash \phi_j \quad \text{и} \quad v \Vdash \phi_j \to \phi_i,$$

  откуда немедленно следует $v \Vdash \phi_i$.

В частности, при $i := n$ мы имеем $v \Vdash \phi_n$, т.е. $v \Vdash \phi$.

Таким образом, $\Gamma \vDash \phi$. $\square$

Простые теории

Говорят, что $\Gamma \subseteq \mathrm{Form}$ является простой теорией, если оно обладает следующими свойствами:

- $\Gamma \neq \mathrm{Form}$;
- $\{\phi \in \mathrm{Form} \mid \Gamma \vdash \phi\} \subseteq \Gamma$;
- для любого $\phi \vee \psi \in \Gamma$ верно $\phi \in \Gamma$ или $\psi \in \Gamma$.

Лемма (о свойствах простых теорий)

Пусть Γ — простая теория. Тогда для любых $\{\phi, \psi\} \subseteq \mathrm{Form}$:

$$
\begin{array}{rcl}
\neg\phi \in \Gamma & \iff & \phi \notin \Gamma; \\
\phi \wedge \psi \in \Gamma & \iff & \phi \in \Gamma \ \text{ и } \ \psi \in \Gamma; \\
\phi \vee \psi \in \Gamma & \iff & \phi \in \Gamma \ \text{ или } \ \psi \in \Gamma; \\
\phi \to \psi \in \Gamma & \iff & \phi \notin \Gamma \ \text{ или } \ \psi \in \Gamma.
\end{array}
$$

Доказательство.

$\boxed{\neg}$ Предположим, что $\neg\phi \in \Gamma$. Рассуждая от противного, допустим, что $\phi \in \Gamma$. Тогда $\Gamma \vdash \psi$ для всех $\psi \in \mathrm{Form}$:

1.	$\neg\phi \to (\phi \to \psi)$	N2
2.	$\neg\phi$	гипотеза
3.	ϕ	гипотеза
4.	$\phi \to \psi$	из 2, 1
5.	ψ	из 3, 4.

Стало быть, $\Gamma = \mathrm{Form}$ — противоречие.

Наоборот, предположим, что $\phi \notin \Gamma$. Поскольку $\vdash \phi \vee \neg\phi$, тем более $\Gamma \vdash \phi \vee \neg\phi$, то $\phi \vee \neg\phi \in \Gamma$, откуда $\neg\phi \in \Gamma$.

$\boxed{\wedge}$ Предположим, что $\phi \wedge \psi \in \Gamma$. Используя C1 и C2, отсюда легко получить $\Gamma \vdash \phi$ и $\Gamma \vdash \psi$, а значит, $\phi \in \Gamma$ и $\psi \in \Gamma$. ...

Доказательство (продолжение).

Теперь предположим, что $\phi \in \Gamma$ и $\psi \in \Gamma$. Используя C3, отсюда легко получить $\Gamma \vdash \phi \wedge \psi$, т.е. $\phi \wedge \psi \in \Gamma$.

$\boxed{\vee}$ Очевидно, $\phi \vee \psi \in \Gamma$ влечёт $\phi \in \Gamma$ или $\psi \in \Gamma$.

Предположим, что $\phi \in \Gamma$ или $\psi \in \Gamma$. Используя D1 или D2, мы можем легко получить $\Gamma \vdash \phi \vee \psi$, а значит, $\phi \vee \psi \in \Gamma$.

$\boxed{\rightarrow}$ Предположим, что $\phi \rightarrow \psi \in \Gamma$. Если $\phi \in \Gamma$, то $\Gamma \vdash \psi$, т.е. $\psi \in \Gamma$.

Предположим, что $\phi \notin \Gamma$ или $\psi \in \Gamma$. В первом случае $\neg\phi \in \Gamma$, откуда с помощью N2 можно получить $\Gamma \vdash \phi \rightarrow \psi$, а значит, $\phi \rightarrow \psi \in \Gamma$. Во втором случае $\Gamma \vdash \phi \rightarrow \psi$ можно получить с помощью I1. $\square$

Лемма (о расширении, a.k.a. Линденбаума)

Пусть $\Gamma \cup \{\phi\} \subseteq \mathrm{Form}$ *таковы, что* $\Gamma \nvdash \phi$. *Тогда существует простая теория* $\Gamma' \supseteq \Gamma$ *такая, что* $\Gamma' \nvdash \phi$.

Доказательство.

Ясно, что Form счётно. Поэтому его элементы можно расположить в последовательность:

$$\psi_0, \quad \psi_1, \quad \psi_2, \quad \ldots,$$

т.е. $\mathrm{Form} = \{\psi_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Теперь определим последовательность

$$\Gamma_0, \quad \Gamma_1, \quad \Gamma_2, \quad \ldots$$

подмножеств Form по рекурсии следующим образом. . . .

Доказательство (продолжение).

- Если $n = 0$, то $\Gamma_n := \Gamma$.
- Если $n = m + 1$ и $\Gamma_m \cup \{\psi_m\} \vdash \phi$, то $\Gamma_n := \Gamma_m$.
- Если $n = m + 1$ и $\Gamma_m \cup \{\psi_m\} \nvdash \phi$, то $\Gamma_n := \Gamma_m \cup \{\psi_m\}$.

По построению мы имеем $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \subseteq \ldots$ Кроме того, $\Gamma_n \nvdash \phi$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Возьмём

$$\Gamma' := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n.$$

Разумеется, $\Gamma \subseteq \Gamma'$ и $\Gamma' \nvdash \phi$. Заметим, что для любой $\psi \in \mathrm{Form}$,

$$\psi \notin \Gamma' \implies \Gamma' \cup \{\psi\} \vdash \phi.$$

Действительно, пусть $\psi \in \mathrm{Form}$. Тогда $\psi = \psi_n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Теперь если $\psi \notin \Gamma'$, то $\Gamma_n \cup \{\psi\} \vdash \phi$, тем более $\Gamma' \cup \{\psi\} \vdash \phi$. ...

Доказательство (продолжение).

Проверим, что Γ' является простой теорией.

- Поскольку $\Gamma' \nvdash \phi$, мы имеем $\Gamma' \neq \mathrm{Form}$.
- Пусть $\psi \notin \Gamma'$. Тогда $\Gamma' \cup \{\psi\} \vdash \phi$, а потому $\Gamma' \nvdash \psi$.
- Пусть $\theta \notin \Gamma'$ и $\chi \notin \Gamma'$. Тогда $\Gamma' \cup \{\theta\} \vdash \phi$ и $\Gamma' \cup \{\chi\} \vdash \phi$. Значит, $\Gamma' \vdash \theta \to \phi$ и $\Gamma' \vdash \chi \to \phi$. Отсюда с помощью D3 легко получить $\Gamma' \vdash \theta \vee \chi \to \phi$. Поэтому $\theta \vee \chi \notin \Gamma'$.

Таким образом, Γ' обладает нужными свойствами. $\square$

Теперь представим, что Prop бесконечно, но не обязательно счётно; это несколько усложняет ситуацию, но не принципиально.

Доказательство в более общем случае.

Возьмём $\kappa := |\mathrm{Prop}|$. Ясно, что $|\mathrm{Form}| = \kappa$. Поэтому элементы Form можно расположить в трансфинитную последовательность длины κ:

$$\langle \psi_\alpha : \alpha \in \kappa \rangle,$$

т.е. $\mathrm{Form} = \{\psi_\alpha \mid \alpha \in \kappa\}$. Определим $\langle \Gamma_\alpha : \alpha \in \kappa \rangle$ по трансфинитной рекурсии следующим образом.

- Если $\alpha = 0$, то $\Gamma_\alpha := \Gamma$.
- Если $\alpha = \beta + 1$ и $\Gamma_\beta \cup \{\psi_\beta\} \vdash \phi$, то $\Gamma_\alpha := \Gamma_\beta$.
- Если $\alpha = \beta + 1$ и $\Gamma_\beta \cup \{\psi_\beta\} \nvdash \phi$, то $\Gamma_\alpha := \Gamma_\beta \cup \{\psi_\beta\}$.
- Если α — предельный ординал, то $\Gamma_\alpha := \bigcup_{\beta \in \alpha} \Gamma_\beta$.

Можно проверить, что $\Gamma' := \bigcup_{\alpha \in \kappa} \Gamma_\alpha$ обл. нужными свойствами. □