Основы математической логики: 3/8

Станислав Олегович Сперанский

ФМКН СПбГУ

Санкт-Петербург 2021

Пример

Пусть v — оценка. Рассмотрим

$$\Gamma_v \; := \; \{\phi \in \mathrm{Form} \mid v \Vdash \phi\}.$$

Легко убедиться, что Γ_v будет простой теорией.

Для каждой простой теории Γ определим оценку v_Γ по правилу

$$v_\Gamma(p) \; := \; \begin{cases} 1 & \text{если } \; p \in \Gamma \\ 0 & \text{иначе;} \end{cases}$$

иными словами, v_Γ — это характеристическая функция для $\mathrm{Prop} \cap \Gamma$.

Лемма

Пусть Γ *— простая теория. Тогда для любой* $\phi \in \mathrm{Form}$,

$$v_\Gamma \Vdash \phi \iff \phi \in \Gamma.$$

Доказательство.

Индукция по построению ϕ, где используется доказанная нами ранее лемма о свойствах простых теорий. $\square$

Теорема (о сильной полноте $\vdash$)

Для любых $\Gamma \cup \{\phi\} \subseteq \mathrm{Form}$,

$$\Gamma \vdash \phi \iff \Gamma \vDash \phi.$$

В частности, $\Gamma \nvdash \bot$, *если и только если* $\Gamma \nvDash \bot$, *а значит,* Γ *непротиворечиво, если и только если* Γ *выполнимо.*

Доказательство.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Это теорема о корректности.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Допустим, что $\Gamma \nvdash \phi$. Как нам известно, найдётся простая теория $\Gamma' \supseteq \Gamma$ такая, что $\Gamma' \nvdash \phi$. Очевидно, $\phi \notin \Gamma'$. Стало быть,

$$v_{\Gamma'} \Vdash \psi \quad \text{для всех} \quad \psi \in \Gamma', \quad \text{но} \quad v_{\Gamma'} \nVdash \phi.$$

В итоге $\Gamma' \nvDash \phi$, тем более $\Gamma \nvDash \phi$. □

Основные следствия

Теорема (о слабой полноте $\vdash$)

Для любой $\phi \in \mathrm{Form}$,

$$\vdash \phi \quad \Longleftrightarrow \quad \vDash \phi,$$

т.е. выводимость из $\varnothing$ *равносильна общезначимости.* □

Теорема (о компактности $\vDash$)

Для любых $\Gamma \cup \{\phi\} \subseteq \mathrm{Form}$,

$$\Gamma \vDash \phi \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta \vDash \phi \quad \text{для некоторого конечного } \Delta \subseteq \Gamma.$$

В частности, $\Gamma \nvDash \bot$, *е.т.е.* $\Delta \nvDash \bot$ *для всех конечных* $\Delta \subseteq \Gamma$, *а значит,* Γ *выполнимо, е.т.е. всякое конечное подмножество* Γ *выполнимо.* □

слабая полнота $\vdash$ плюс компактность $\vDash$ равно сильная полнота $\vdash$

Структуры

Под сигнатурой понимают четвёрку вида

$$\sigma = \langle \mathrm{Pred}_\sigma, \mathrm{Func}_\sigma, \mathrm{Const}_\sigma, \mathrm{arity}_\sigma \rangle,$$

где Pred_σ, Func_σ, Const_σ — попарно непересекающиеся множества, а arity_σ — функция из $\mathrm{Pred}_\sigma \cup \mathrm{Func}_\sigma$ в $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Элементы Pred_σ, Func_σ и Const_σ называют соответственно предикатными, функциональными и константными символами σ.

Для данного символа $\varepsilon \in \mathrm{Pred}_\sigma \cup \mathrm{Func}_\sigma$ число $\mathrm{arity}_\sigma(\varepsilon)$ называют местностью ε, или его арностью, или его валентностью.

Когда из контекста ясно, о какой сигнатуре σ идёт речь, индекс $\cdot_\sigma$ может, разумеется, опускаться.

В дальнейшем при записи сигнатур нами будет допускаться определённая свобода. Так, если

$$\mathrm{Pred}_\sigma = \{P_1, \ldots, P_i\},$$
$$\mathrm{Func}_\sigma = \{f_1, \ldots, f_j\} \quad \text{и} \quad \mathrm{Const}_\sigma = \{c_1, \ldots, c_k\},$$

то σ удобно представить как

$$\langle P_1^{n_1}, \ldots, P_i^{n_i}; f_1^{m_1}, \ldots, f_j^{m_j}; c_1, \ldots, c_k\rangle,$$

где $n_1, \ldots, n_i$ и $m_1, \ldots, m_j$ суть местности соответственно $P_1, \ldots, P_i$ и $f_1, \ldots, f_j$.

Пример

Сигнатура (строгих) ч.у.м. — $\langle <^2 \rangle$, абелевых групп — $\langle =^2; +^2, -^1; 0\rangle$.

Под σ-структурой понимают пару вида

$$\mathfrak{A} = \langle A, I_{\mathfrak{A}} \rangle,$$

где A — непустое множество, а $I_{\mathfrak{A}}$ — функция с областью определения $\mathrm{Pred}_\sigma \cup \mathrm{Func}_\sigma \cup \mathrm{Const}_\sigma$ такая, что:

- для любого n-местного $P \in \mathrm{Pred}_\sigma$ верно $I_{\mathfrak{A}}(P) \subseteq A^n$;
- для любого m-местного $f \in \mathrm{Func}_\sigma$ верно $I_{\mathfrak{A}}(f) : A^m \to A$;
- для любого $c \in \mathrm{Const}_\sigma$ верно $I_{\mathfrak{A}}(c) \in A$.

При этом A называется носителем $\mathfrak{A}$, или её универсумом, а $I_{\mathfrak{A}}$ — интерпретацией σ в $\mathfrak{A}$. Вместо $I_{\mathfrak{A}}(P)$, $I_{\mathfrak{A}}(f)$ и $I_{\mathfrak{A}}(c)$ часто пишут соответственно $P^{\mathfrak{A}}$, $f^{\mathfrak{A}}$ и $c^{\mathfrak{A}}$.

Кроме того, если σ представляется как

$$\langle P_1^{n_1}, \ldots, P_i^{n_i}; f_1^{m_1}, \ldots, f_j^{m_j}; c_1, \ldots, c_k \rangle,$$

то $\mathfrak{A}$ удобно представить как

$$\langle A; P_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, P_i^{\mathfrak{A}}; f_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, f_j^{\mathfrak{A}}; c_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, c_k^{\mathfrak{A}} \rangle.$$

Более того, для некоторых *стандартных* структур $\mathfrak{A}$ даже индекс $\cdot^{\mathfrak{A}}$ может опускаться, хоть это и чревато некоторой путаницей.

Замечание

В предыдущем семестре для ч.у.м. мы использовали запись $\langle A, <_A \rangle$, но аккуратнее было бы $\mathfrak{A} = \langle A; <^{\mathfrak{A}} \rangle$; вместе с тем, очевидно, далеко не всякая структура в сигнатуре ч.у.м. является ч.у.м.

Пример

Рассмотрим сигнатуру

$$\sigma \ := \ \langle =^2; \mathrm{s}^1, +^2, \cdot^2; 0 \rangle.$$

Обозначим через $\mathfrak{N}$ σ-структуру с носителем $\mathbb{N}$ такую, что:

- $=^{\mathfrak{N}}$ — это отношение равенства на $\mathbb{N}$;
- $\mathrm{s}^{\mathfrak{N}}$ — это функция последователя на $\mathbb{N}$;
- $+^{\mathfrak{N}}$ — это обычная функция сложения на $\mathbb{N}$;
- $\cdot^{\mathfrak{N}}$ — это обычная функция умножения на $\mathbb{N}$;
- $0^{\mathfrak{N}}$ — это настоящий ноль из $\mathfrak{N}$.

Эту структуру называют стандартной моделью арифметики.

Пример

Рассмотрим сигнатуру

$$\sigma \;:=\; \langle =^2 ; +^2 , -^1 , \cdot^2 ; 0, 1 \rangle .$$

Её называют сигнатурой колец, разумеется. Обозначим

$$\mathfrak{Z} \;:=\; \begin{array}{c}\sigma\text{-структуру с носителем } \mathbb{Z}\text{, в которой все символы}\\ \sigma \text{ интерпретируются естественным образом.}\end{array}$$

В частности, $-^{\mathfrak{Z}}$ — это функция взятия обратного по сложению над $\mathbb{Z}$. По аналогии вместо $\mathbb{Z}$ можно было бы использовать:

- $\mathbb{Z}_n$, т.е. множество всех целых чисел по модулю n;
- $M_n(\mathbb{R})$, т.е. множество всех матриц порядка n над $\mathbb{R}$;
- $\mathbb{Q}[x]$, т.е. множество всех многочленов от x с коэф. из $\mathbb{Q}$.

(Здесь n — произв. фиксированное положительное целое число.)

Пример

Рассмотрим сигнатуру

$$\sigma \ := \ \langle =^2, \cong^4, B^3 \rangle.$$

Обозначим через $\mathfrak{G}$ σ-структуру с носителем $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ такую, что:

- $=^{\mathfrak{G}}$ — это отношение равенства на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$;
- $\cong^{\mathfrak{G}}$ определяется по правилу

$$(r_1, r_2, r_3, r_4) \ \in \ \cong^{\mathfrak{G}} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{отрезки } r_1 r_2 \text{ и } r_3 r_4 \text{ равны;}$$

- $B^{\mathfrak{G}}$ определяется по правилу

$$(r_1, r_2, r_3) \ \in \ B^{\mathfrak{G}} \quad \Longleftrightarrow \quad r_2 \text{ лежит между } r_1 \text{ и } r_3 \text{ на прямой.}$$

Её можно было бы назвать стандартной моделью геометрии.

Пример

Пусть σ — сигнатура из предыдущего примера. Возьмём

$$\mathbb{H} \;:=\; \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}.$$

Обозначим через $\mathfrak{H}$ σ-структуру с носителем $\mathbb{H}$ такую, что:

- $=^{\mathfrak{H}}$ — это отношение равенства на $\mathbb{H}$;
- $\cong^{\mathfrak{H}}$ определяется по правилу

$$(r_1, r_2, r_3, r_4) \;\in\; \cong^{\mathfrak{H}} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{array}{c}\text{отрезки } r_1r_2 \text{ и } r_3r_4 \text{ равны}\\ \text{в смысле метрики Пуанкаре;}\end{array}$$

- $B^{\mathfrak{H}}$ определяется по правилу

$$(r_1, r_2, r_3) \;\in\; B^{\mathfrak{H}} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{array}{c}r_2 \text{ лежит между } r_1 \text{ и } r_3 \text{ на полуокр.}\\ \text{(или полупр.), ортог. вещ. оси.}\end{array}$$

Её называют моделью Пуанкаре геометрии Лобачевского.

Гомоморфизмы между структурами

Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — две σ-структуры. Говорят, что $\xi : A \to B$ явл. гомоморфизмом из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$, если выполнены следующие условия:

i. для любого n-местного $P \in \mathrm{Pred}_\sigma$ и всех $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$,

$$(a_1, \ldots, a_n) \in P^{\mathfrak{A}} \quad \Longrightarrow \quad (\xi(a_1), \ldots, \xi(a_n)) \in P^{\mathfrak{B}};$$

ii. для любого m-местного $f \in \mathrm{Func}_\sigma$ и всех $(a_1, \ldots, a_m) \in A^m$,

$$\xi\left(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_m)\right) = f^{\mathfrak{B}}(\xi(a_1), \ldots, \xi(a_m));$$

iii. для любого $c \in \mathrm{Const}_\sigma$,

$$\xi\left(c^{\mathfrak{A}}\right) = c^{\mathfrak{B}}.$$

Заметим, что композиция гомоморфизмов — снова гомоморфизм.

Вложения и изоморфизмы

Инъективный гомоморфизм ξ из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$ называют **вложением $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$**, если выполнено усиление (i), где $\Longrightarrow$ заменена на $\Longleftrightarrow$, т.е.

$$\xi^{-1}\left[P^{\mathfrak{B}}\right] \;=\; P^{\mathfrak{A}} \quad \text{для каждого } \; P \in \mathrm{Pred}_\sigma .$$

Сюръективное вложение $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$ называют **изоморфизмом из $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$**. Наконец, говорят, что **$\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ изоморфны**, и пишут $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$, если сущ. изоморфизм из $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$.

Замечание

Гомом. ξ из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$ является изоморфизмом, е.т.е. найдётся обратный к нему гомоморфизм, т.е. гомоморфизм η из $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{A}$ такой, что

$$\xi \circ \eta \;=\; \mathrm{id}_A \quad \text{и} \quad \eta \circ \xi \;=\; \mathrm{id}_B .$$

□

Пример

Рассмотрим нестрогие ч.у.м. $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ такие, что:

- $A = B = \mathbb{N} \setminus \{0\}$;
- $\leqslant^{\mathfrak{A}}$ — это отношение делимости на $\mathbb{N} \setminus \{0\}$;
- $\leqslant^{\mathfrak{B}}$ — это обычный порядок на $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Тогда $\lambda a.[a]$ будет биективным гомоморфизмом из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$.

Пример

Рассмотрим нестрогие ч.у.м. $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ такие, что:

- $A = \mathbb{N}$ и $B = \mathbb{P}$;
- $\leqslant^{\mathfrak{A}}$ — это обычный порядок на $\mathbb{N}$;
- $\leqslant^{\mathfrak{B}}$ — это обычный порядок на $\mathbb{P}$.

Тогда $\lambda a.[a\text{-ое простое число}]$ будет изоморфизмом из $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$.

Пример

Зафиксируем $p \in \mathbb{P}$. Рассмотрим группы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ такие, что:

- $A = \mathbb{Z}$ и $B = \mathbb{Z}_p$;
- $+^{\mathfrak{A}}$ — это сложение на $\mathbb{Z}$;
- $+^{\mathfrak{B}}$ — это сложение на $\mathbb{Z}_p$.

Тогда $\lambda a.[a \bmod p]$ будет сюрьективным гомоморфизмом из $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$.

Пример

Рассмотрим группы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ такие, что:

- $A = \mathbb{R}$ и $B = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- $+^{\mathfrak{A}}$ — это сложение на $\mathbb{R}$;
- $+^{\mathfrak{B}}$ — это <u>умножение</u> на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Тогда $\lambda a.[2^a]$ будет вложением $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$.

Автоморфизмы

Под автоморфизмами $\mathfrak{A}$ понимают изоморфизмы из $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}$. Интуитивно автоморизмы — абстрактный аналог симметрий. Обозначим

$$\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{A}) \;:=\; \text{множество всех автоморфизмов } \mathfrak{A}.$$

Над $\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{A})$ можно естественным образом задать структуру группы, где роль бинарной операции играет композиция.

Пример

Пусть ξ — произвольный автоморфизм стандартной модели $\mathfrak{N}$ арифметики. Тогда

$$\xi\,(0) \;=\; 0, \quad \xi\,(1) \;=\; \mathsf{s}^{\mathfrak{N}}\,(\xi\,(0)) \;=\; 1, \quad \ldots$$

Значит, $\xi = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$. Стало быть, $\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{N}) = \{\mathrm{id}_{\mathbb{N}}\}$.

Пример

Обозначим через $\mathfrak{N}_<$ стандартный ч.у.м. с носителем $\mathbb{N}$. Пусть ξ — произвольный автоморфизм $\mathfrak{N}_<$. Нетрудно понять, что:

$$\begin{aligned}
\xi\,(\mathrm{least}\,(\mathbb{N})) &= \mathrm{least}\,(\mathbb{N});\\
\xi\,(\mathrm{least}\,(\mathbb{N}\setminus\{0\})) &= \mathrm{least}\,(\mathbb{N}\setminus\{\xi\,(0)\});\\
\xi\,(\mathrm{least}\,(\mathbb{N}\setminus\{0,1\})) &= \mathrm{least}\,(\mathbb{N}\setminus\{\xi\,(0),\xi\,(1)\});\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Отсюда мы получаем:

$$\begin{aligned}
\xi\,(0) &= \mathrm{least}\,(\mathbb{N});\\
\xi\,(1) &= \mathrm{least}\,(\mathbb{N}\setminus\{0\});\\
\xi\,(2) &= \mathrm{least}\,(\mathbb{N}\setminus\{0,1\});\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Значит, $\xi = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$. Стало быть, $\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{N}_<) = \{\mathrm{id}_{\mathbb{N}}\}$.

Пример (со схемой решения)

Обозначим через $\mathfrak{D}$ нестрогий ч.у.м. с носителем $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, в котором $\leqslant$ интерпретируется как отношение делимости. Заметим, что:

- всякий автоморфизм $\mathfrak{D}$ переводит элементы $\mathbb{P}$ в элементы $\mathbb{P}$;
- каждую биекцию из $\mathbb{P}$ на $\mathbb{P}$ можно ед. образом расширить до автоморфизма $\mathfrak{D}$.

Отсюда нетрудно получить, что $\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{D})$ фактически состоит из перестановок $\mathbb{P}$, а точнее, из их расширений.

Пример (в качестве доп. упражнения)

Для стандартной модели $\mathfrak{G}$ геометрии всякий автоморфизм представим в виде композиции движения и гомотетии.