Основы математической логики: 4/8

Станислав Олегович Сперанский

ФМКН СПбГУ

Санкт-Петербург 2021

Язык кванторной кл. логики, QCL

Раз и навсегда зафиксируем какое-нибудь счётное множество

$$\mathrm{Var} \;:=\; \{v_0, v_1, v_2, \ldots\}.$$

Элементы Var мы будем называть предметными переменными, или просто переменными; в метаязыке их роль будут играть x, y, z, ... (возможно, с индексами).

Пусть σ — сигнатура. Язык $\mathscr{L}_\sigma$ кварт. кл. логики над σ состоит из элементов $\mathrm{Pred}_\sigma \cup \mathrm{Func}_\sigma \cup \mathrm{Const}_\sigma \cup \mathrm{Var}$, а также:

- $\to$, $\wedge$, $\vee$ и $\neg$ (символы связок);
- $\forall$ и $\exists$ (символы кванторов);
- (,) и , (вспомогательные символы).

Для каждой $x \in \mathrm{Var}$ слова $\forall x$ и $\exists x$ называют кванторами по x.

Обозначим через Term$_\sigma$ наим. множество слов в алфавите $\mathscr{L}_\sigma$, замкнутое относительно следующих порождающих правил:

- если $x \in \mathrm{Var}$, то $x \in \mathrm{Term}_\sigma$;
- если $c \in \mathrm{Const}_\sigma$, то $c \in \mathrm{Term}_\sigma$;
- если $f \in \mathrm{Func}_\sigma$, $\mathrm{arity}_\sigma(f) = n$ и $\{t_1, \ldots t_n\} \subseteq \mathrm{Term}_\sigma$, то

$$f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathrm{Term}_\sigma.$$

Элементы Term$_\sigma$ называют σ-термами.

Пример

Пусть σ — сигнатура стандартной модели арифметики. Тогда

$$+(\mathrm{s}(+(x, y)), \cdot(\mathrm{s}(x), y))$$

является σ-термом, который удобнее записать как $\mathrm{s}(x + y) + \mathrm{s}(x) \cdot y$.

Обозначим через Form_σ наим. множество слов в алфавите $\mathscr{L}_\sigma$, замкнутое относительно следующих порождающих правил:

- если $P \in \mathrm{Pred}_\sigma$, $\mathrm{arity}_\sigma(P) = n$ и $\{t_1, \ldots t_n\} \subseteq \mathrm{Term}_\sigma$, то
$$P(t_1, \ldots, t_n) \ \in \ \mathrm{Form}_\sigma;$$
- если $\{\Phi, \Psi\} \subseteq \mathrm{Form}_\sigma$, то
$$\{(\Phi \to \Psi), (\Phi \wedge \Psi), (\Phi \vee \Psi), \neg\Phi\} \ \subseteq \ \mathrm{Form}_\sigma;$$
- если $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$ и $x \in \mathrm{Var}$, то
$$\{\forall x\, \Phi, \exists x\, \Phi\} \ \subseteq \ \mathrm{Form}_\sigma.$$

Элементы Form_σ называют σ-формулами.

Под атомарными σ-формулами, или σ-атомами, понимаются те, что не содержат ни символов связок, ни символов кванторов.

Для любых $t \in \mathrm{Term}_\sigma$ и $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$ определим

$$\begin{aligned} \mathrm{sub}\,(t) &:= \{s \in \mathrm{Term}_\sigma \mid s \preccurlyeq t\}, \\ \mathrm{Sub}\,(\Phi) &:= \{\Psi \in \mathrm{Form}_\sigma \mid \Psi \preccurlyeq \Phi\}. \end{aligned}$$

Разумеется, элементы $\mathrm{sub}\,(t)$ и $\mathrm{Sub}\,(\Phi)$ называются соответственно подтермами t и подформулами Φ.

Лемма

Пусть $\{t, s\} \subseteq \mathrm{Term}_\sigma$ *таковы, что* $t \sqsubseteq s$. *Тогда* $t = s$. □

Предложение (о единственности представления термов)

Всякий $t \in \mathrm{Term}_\sigma \setminus (\mathrm{Var} \cup \mathrm{Const}_\sigma)$ *можно един. образом представить в виде*

$$f\,(t_1, \ldots, t_n),$$

где $f \in \mathrm{Func}_\sigma$, $\mathrm{arity}_\sigma\,(f) = n$ *и* $\{t_1, \ldots t_n\} \subseteq \mathrm{Term}_\sigma$. □

Лемма

Пусть $t \in \mathrm{Term}_\sigma$ *и* $f \in \mathrm{Func}_\sigma$. *Тогда всякое вхождение* f *в* t *является началом вхождения некоторого подтерма.* $\square$

Предложение (о подтермах)

Пусть $t \in \mathrm{Term}_\sigma$.

- *Если* $t \in \mathrm{Var} \cup \mathrm{Const}_\sigma$, *то* $\mathrm{sub}(t) = \{t\}$.
- *Если* $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, *где* $f \in \mathrm{Func}_\sigma$, $\mathrm{arity}_\sigma(f) = n$ *и* $\{t_1, \ldots t_n\} \subseteq \mathrm{Term}_\sigma$, *то*

$$\mathrm{sub}(t) = \mathrm{sub}(t_1) \cup \cdots \cup \mathrm{sub}(t_n) \cup \{t\}.$$

$\square$

Для удобства обозначим через Atom_σ множество всех σ-атомов.

Предложение (о единственности представления атомов)

Всякий $\Phi \in \mathrm{Atom}_\sigma$ *можно един. образом представить в виде*

$$P\,(t_1, \ldots, t_n),$$

где $P \in \mathrm{Pred}_\sigma$, $\mathrm{arity}_\sigma\,(P) = n$ *и* $\{t_1, \ldots t_n\} \subseteq \mathrm{Term}_\sigma$. □

Лемма

Пусть $\{\Phi, \Psi\} \subseteq \mathrm{Form}_\sigma$ *таковы, что* $\Phi \sqsubseteq \Psi$. *Тогда* $\Phi = \Psi$. □

Предложение (о единственности представления формул)

Всякую $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma \setminus \mathrm{Atom}_\sigma$ *можно един. образом представить в виде*

$$(\Theta \to \Omega), \quad (\Theta \wedge \Omega), \quad (\Theta \vee \Omega), \quad \neg\Theta, \quad \forall x\,\Theta \quad \textit{или} \quad \exists x\,\Theta,$$

где $\{\Theta, \Omega\} \subseteq \mathrm{Form}_\sigma$. □

Лемма

Пусть $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$. *Тогда всякое вхождение* $\neg$, (, $\forall$ *или* $\exists$ *в* Φ *является началом вхождения некоторой подформулы.* $\square$

Предложение (о подформулах)

Пусть $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$.

- *Если* $\Phi \in \mathrm{Atom}_\sigma$, *то* $\mathrm{Sub}(\Phi) = \{\Phi\}$.
- *Если* $\Phi = (\Theta \circ \Omega)$, *где* $\{\Theta, \Omega\} \subseteq \mathrm{Form}_\sigma$ *и* $\circ \in \{\to, \wedge, \vee\}$, *то*
$$\mathrm{Sub}(\Phi) = \mathrm{Sub}(\Theta) \cup \mathrm{Sub}(\Omega) \cup \{\Phi\};$$
- *Если* $\Phi = \neg\Theta$, *где* $\Theta \in \mathrm{Form}_\sigma$, *или* $\Phi = \mathrm{Q}x\,\Theta$, *где* $x \in \mathrm{Var}$, $\Theta \in \mathrm{Form}_\sigma$ *и* $\mathrm{Q} \in \{\forall, \exists\}$, *то*
$$\mathrm{Sub}(\Phi) = \mathrm{Sub}(\Theta) \cup \{\Phi\}.$$

$\square$

Связанные и свободные переменные

Пусть $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$, $x \in \mathrm{Var}$ и $\mathrm{Q} \in \{\forall, \exists\}$.

Каждое вхождение $\mathrm{Q}x$ в Φ является началом вхождения некоторой подформулы, причём последнее определяется однозначно; его называют областью действия данного вхождения $\mathrm{Q}x$.

Вхождение x в Φ называется связанным, если оно входит в область действия какого-нибудь вхождения $\forall x$ или $\exists x$, и свободным иначе.

Далее, говорят, что x является свободной переменной в Φ, если у x есть хотя бы одно свободное вхождение в Φ.

Для удобства введём обозначение

$$\mathrm{FV}(\Phi) \ := \ \left\{ z \in \mathrm{Var} \ \middle| \ \begin{array}{l} \text{у } z \text{ имеется хотя бы одно} \\ \text{свободное вхождение в } \Phi \end{array} \right\}.$$

Интуитивно элементы $\mathrm{FV}(\Phi)$ играют роль параметров для Φ. Запись $\Phi(x_1, \ldots, x_\ell)$ указывает на то, что $\mathrm{FV}(\Phi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_\ell\}$.

Наконец, обозначим

$$\mathrm{Sent}_\sigma \ := \ \{\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma \mid \mathrm{FV}(\Phi) = \varnothing\}.$$

Элементы Sent_σ называют σ-предложениями, реже — замкнутыми σ-формулами. Они могут выступать в качестве нелог. аксиом.

Замечание

Можно провести аналогию между кванторами и операторами суммирования, интегрирования и т.д. Так, в выражении

$$\int_0^x y \cdot z \, dy$$

оба вхождения y связаны; вместо них нельзя подставить конкретные числа. Вместе с тем x и z свободны и фактически играют роль параметров. Далее, в выражении

$$2y + \int_0^x y \cdot z \, dy$$

первое вхождение y является свободным, а другие два — нет. Интуитивно данное выражение равносильно

$$2y + \int_0^x u \cdot z \, du.$$

Пример

Пусть σ — сигнатура арифметики. Рассмотрим σ-формулу

$$\Phi \;:=\; \forall x\, \exists y\; x = y + 0 \cdot u \wedge \forall y\, \exists u\; x + u = y.$$

Тогда $\mathrm{FV}(\Phi) = \{u, x\}$. Тут мы можем написать $\Phi(u, x)$ или $\Phi(x, u)$; также приемлемы «избыточные» $\Phi(u, x, y)$, $\Phi(x, u, v)$ и т.п.

Пример

Пусть σ — сигнатура (строгих) ч.у.м. В таком случае под аксиомами ч.у.м. понимают следующие σ-предложения:

- $\forall x\, \neg x < x$; $\quad$ %$\forall x\; x \not< x$
- $\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x < y \wedge y < z \to x < z)$.

Интуитивно σ-структура является ч.у.м., если и только если она удовлетворяет этим аксиомам.

О подстановках термов в формулы

Пусть $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$, $x \in \mathrm{Var}$ и $t \in \mathrm{Term}_\sigma$. Обозначим

$$\Phi\,(x/t) \;:=\; \text{результат одновременной замены всех свободных вхождений } x \text{ в } \Phi \text{ на } t.$$

Применение этой операции порой приводит к весьма нежелательным последствиям. Так, σ-формулы вида

$$\forall x\,\Phi \to \Phi\,(x/t)$$

кажутся истинными, но при

$$\sigma \;:=\; \langle <^2 \rangle, \quad \Phi \;:=\; \exists y\, x < y \quad \text{и} \quad t \;:=\; y$$

мы получаем

$$\forall x\,\exists y\, x < y \to \exists y\, y < y.$$

Кроме того, σ-формулы вида

$$\Phi\,(x/t) \to \exists x\, \Phi$$

кажутся истинными, но при

$$\sigma \;:=\; \langle =^2 \rangle, \quad \Phi \;:=\; \forall y\, x = y \quad \text{и} \quad t \;:=\; y$$

мы получаем

$$\forall y\, y = y \to \exists x\, \forall y\, x = y.$$

Поэтому с подстановками нужно обращаться аккуратнее.

Мы будем говорить, что t свободен для (подстановки вместо) x в Φ, если ни одно из свободных вхождений x в Φ не находится в области действия квантора по переменной из t.

Замечание

Проводя аналогию с оператором интегрирования, рассмотрим

$$\int_0^1 y \cdot z \, dy.$$

Подстановка $u + v$ вместо z в это выражение даёт

$$\int_0^1 y \cdot (u + v) \, dy.$$

Тут уже два параметра, но смысл практически не изменился; просто z приобрело более конкретный вид. С другой стороны, при формальной подстановке $u + y$ вместо z мы получим

$$\int_0^1 y \cdot (u + y) \, dy \; = \; \int_0^1 y \cdot u + y^2 \, dy,$$

что существенно меняет смысл исходного выражения.

Под означиваниями переменных в $\mathfrak{A}$, или просто означиваниями в $\mathfrak{A}$, понимаются функции из Var в A. Каждое означивание ν в $\mathfrak{A}$ можно расширить до $\overline{\nu} : \mathrm{Term}_\sigma \to A$ естественным образом:

$$\begin{aligned}
\overline{\nu}(x) &:= \nu(x); \\
\overline{\nu}(c) &:= c^{\mathfrak{A}}; \\
\overline{\nu}(f(t_1, \ldots, t_n)) &:= f^{\mathfrak{A}}(\overline{\nu}(t_1), \ldots, \overline{\nu}(t_n)).
\end{aligned}$$

В дальнейшем для любых $x \in \mathrm{Var}$ и $a \in A$ через ν_a^x будет обозначаться означивание, получающееся из ν по правилу

$$\nu_a^x(y) := \begin{cases} \nu(y) & \text{если } y \neq x, \\ a & \text{если } y = x. \end{cases}$$

Определим $\mathfrak{A} \Vdash \Phi\,[\nu]$ индукцией по построению Φ:

$$
\begin{array}{rcl}
\mathfrak{A} \Vdash P(t_1, \ldots, t_n)\,[\nu] & \Longleftrightarrow & (\overline{\nu}(t_1), \ldots, \overline{\nu}(t_n)) \in P^{\mathfrak{A}}; \\
\mathfrak{A} \Vdash \Psi \wedge \Theta\,[\nu] & \Longleftrightarrow & \mathfrak{A} \Vdash \Psi\,[\nu] \text{ и } \mathfrak{A} \Vdash \Theta\,[\nu]; \\
\mathfrak{A} \Vdash \Psi \vee \Theta\,[\nu] & \Longleftrightarrow & \mathfrak{A} \Vdash \Psi\,[\nu] \text{ или } \mathfrak{A} \Vdash \Theta\,[\nu]; \\
\mathfrak{A} \Vdash \neg\Psi\,[\nu] & \Longleftrightarrow & \mathfrak{A} \nVdash \Psi\,[\nu]; \\
\mathfrak{A} \Vdash \Psi \to \Theta\,[\nu] & \Longleftrightarrow & \mathfrak{A} \nVdash \Psi\,[\nu] \text{ или } \mathfrak{A} \Vdash \Theta\,[\nu]; \\
\mathfrak{A} \Vdash \exists x\,\Psi\,[\nu] & \Longleftrightarrow & \mathfrak{A} \Vdash \Psi\,[\nu^x_a] \text{ для некоторого } a \in A; \\
\mathfrak{A} \Vdash \forall x\,\Psi\,[\nu] & \Longleftrightarrow & \mathfrak{A} \Vdash \Psi\,[\nu^x_a] \text{ для всех } a \in A.
\end{array}
$$

Когда $\mathfrak{A} \Vdash \Phi\,[\nu]$, мы будем говорить, что Φ истинно в $\mathfrak{A}$ при ν, или $\mathfrak{A}$ удовлетворяет Φ при ν.

Стоит отметить, что (не)верность $\mathfrak{A} \Vdash \Phi\,[\nu]$ не зависит от того, какие значения ν сопоставляет элементам $\mathrm{Var} \setminus FV(\Phi)$.

Если Φ имеет вид $\Phi(x_1, \ldots, x_\ell)$, т.е. $\mathrm{FV}(\Phi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_\ell\}$, то вместо $\mathfrak{A} \Vdash \Phi[\nu]$ нередко пишут

$$\mathfrak{A} \Vdash \Phi[x_1/\nu(x_1), \ldots, x_\ell/\nu(x_\ell)],$$

или же $\mathfrak{A} \Vdash \Phi[\nu(x_1), \ldots, \nu(x_\ell)]$. В частности, для $\Phi \in \mathrm{Sent}_\sigma$ обычно используется запись $\mathfrak{A} \Vdash \Phi$.

Наконец, пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$. Говорят, что $\mathfrak{A}$ является моделью Γ, и пишут $\mathfrak{A} \Vdash \Gamma$, если $\mathfrak{A} \Vdash \Phi$ для всех $\Phi \in \Gamma$.

Предложение

Пусть ξ — изоморфизм из $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$. Тогда для каждой σ-формулы Φ и любого означивания ν в $\mathfrak{A}$,

$$\mathfrak{A} \Vdash \Phi\,[\nu] \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{B} \Vdash \Phi\,[\nu \circ \xi].$$

(Очевидно, $\nu \circ \xi$ является означиванием в $\mathfrak{B}$.)

Доказательство.

Возьмём $\mu := \nu \circ \xi$. Заметим, что для всех $t \in \mathrm{Term}_\sigma$,

$$\overline{\mu}\,(t) \;=\; \xi\,(\overline{\nu}\,(t))$$

(это доказывается простой индукцией по построению t). Теперь идёт несложная индукция по построению Φ. . . .

Доказательство (продолжение).

- Пусть $\Phi = P(t_1, \ldots, t_n)$. Тогда

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{A} \Vdash \Phi[\nu] \quad & \Longleftrightarrow \quad (\overline{\nu}(t_1), \ldots, \overline{\nu}(t_n)) \in P^{\mathfrak{A}} \\
& \Longleftrightarrow \quad (\xi(\overline{\nu}(t_1)), \ldots, \xi(\overline{\nu}(t_n))) \in P^{\mathfrak{B}} \\
& \Longleftrightarrow \quad (\overline{\mu}(t_1), \ldots, \overline{\mu}(t_n)) \in P^{\mathfrak{B}} \\
& \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{B} \Vdash \Phi[\mu].
\end{aligned}
$$

...

Доказательство (продолжение).

- Пусть $\Phi = \neg\Psi$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \Vdash \Phi\,[\nu] &\iff \mathfrak{A} \nVdash \Psi\,[\nu] \\ &\iff \mathfrak{B} \nVdash \Psi\,[\mu] \\ &\iff \mathfrak{B} \Vdash \Phi\,[\mu]. \end{aligned}$$

- Пусть $\Phi = \Psi \wedge \Theta$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \Vdash \Phi\,[\nu] &\iff \mathfrak{A} \Vdash \Psi\,[\nu] \ \text{ и } \ \mathfrak{A} \Vdash \Theta\,[\nu] \\ &\iff \mathfrak{B} \Vdash \Psi\,[\mu] \ \text{ и } \ \mathfrak{B} \Vdash \Theta\,[\mu] \\ &\iff \mathfrak{B} \Vdash \Phi\,[\mu]. \end{aligned}$$

- Аналогично для $\Phi = \Psi \vee \Theta$ и $\Phi = \Psi \to \Theta$.

...

Доказательство (продолжение).

- Пусть $\Phi = \forall x\, \Psi$. Тогда

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \Vdash \Phi\,[\nu] \quad & \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{A} \Vdash \Psi\,[\nu^x_a] \ \text{ для всех } a \in A \\
& \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{B} \Vdash \Psi\left[\mu^x_{\xi(a)}\right] \ \text{ для всех } a \in A \\
& \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{B} \Vdash \Psi\,[\mu^x_b] \ \text{ для всех } b \in B \\
& \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{B} \Vdash \Phi\,[\mu].
\end{aligned}$$

- Аналогично для $\Phi = \exists x\, \Psi$.

$\square$

Для произвольного класса $\mathcal{K}$ σ-структур положим

$$\mathrm{Th}\,(\mathcal{K}) \;:=\; \{\Phi \in \mathrm{Sent}_\sigma \mid \mathfrak{A} \Vdash \Phi \text{ для всех } \mathfrak{A} \in \mathcal{K}\}.$$

Вместо $\mathrm{Th}\,(\{\mathfrak{A}\})$ обычно пишут $\mathrm{Th}\,(\mathfrak{A})$. Говорят, что $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ элементарно эквивалентны, если $\mathrm{Th}\,(\mathfrak{A}) = \mathrm{Th}\,(\mathfrak{B})$.

Следствие

Изоморфные структуры элементарно эквивалентны. $\square$