# Основы математической логики: 5/8

Станислав Олегович Сперанский

ФМКН СПбГУ

Санкт-Петербург 2021

# Определимость в структурах

Пусть дана произвольная $\sigma$-структура $\mathfrak{A}$.

Мы называем $S \subseteq A^\ell$ определимым в $\mathfrak{A}$, если существует $\sigma$-формула $\Phi\,(x_1, \ldots, x_\ell)$ такая, что

$$S \;=\; \left\{\vec{a} \in A^\ell \mid \mathfrak{A} \Vdash \Phi\,[\vec{a}]\right\};$$

в этом случае ещё говорят, что $\Phi$ определяет $S$ в $\mathfrak{A}$.

В частности, $\xi : A^\ell \to A$ определима в $\mathfrak{A}$, если определим её график.

Кроме того, $a \in A$ определим в $\mathfrak{A}$, если $\{a\}$ определимо.

### Пример

Отношение делимости на $\mathbb{N}$ определимо в $\mathfrak{N}$ посредством формулы

$$\Phi(x, y) \ := \ x \neq 0 \wedge \exists u \, x \cdot u = y,$$

а обычный строгий порядок на $\mathbb{N}$ — посредством

$$\Psi(x, y) \ := \ \exists u \, (u \neq 0 \wedge x + u = y).$$

### Пример

Функция последователя на $\mathbb{N}$ определима в $\mathfrak{N}_{<}$ посредством

$$x < y \wedge \neg \exists u \, (x < u \wedge u < y).$$

### Пример

В стандартном кольце $\mathfrak{Z}$ с носителем $\mathbb{Z}$ будет определимо отношение «быть больше нуля»; тут можно использовать

$$\Phi(x) \;:=\; x \neq 0 \wedge \exists u_1, u_2, u_3, u_4 \left(x = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2\right),$$

а потому обычный строгий порядок на $\mathbb{Z}$ определим в $\mathfrak{Z}$ посредством

$$\Psi(x, y) \;:=\; \exists u \left(\Phi(u) \wedge x + u = y\right).$$

### Пример

Обычный строгий порядок на $\mathbb{R}$ определим в стандартном кольце $\mathfrak{R}$ с носителем $\mathbb{R}$ посредством

$$\Theta(x, y) \;:=\; \exists u \left(u \neq 0 \wedge x + u^2 = y\right).$$

## Пример

Рассмотрим стандартную модель $\mathfrak{G}$ геометрии. В ней отношения

- «$x$ лежит на прямой $yz$» и
- «прямые $xx'$ и $yy'$ и параллельны»

определимы посредством соответственно

$$
\begin{aligned}
\Phi(x,y,z) &:= B(x,y,z) \vee B(z,x,y) \vee B(y,z,x) \quad \text{и} \\
\Psi(x,x',y,y') &:= x \neq x' \wedge y \neq y' \wedge \neg\exists u\,(\Phi(u,x,x') \wedge \Phi(u,y,y')).
\end{aligned}
$$

При этом аксиому о параллельных можно выразить так:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Euclid\_5} := \forall x,y,z\,(x \neq y \wedge \neg\Phi(z,x,y) \to \\
\forall u,v\,(\Psi(z,u,x,y) \wedge \Psi(z,v,x,y) \to \Phi(z,u,v))).
\end{aligned}
$$

Она будет истинна в $\mathfrak{G}$, но ложна в модели $\mathfrak{H}$.

### Пример (без доказательства)

Рассмотрим структуру $\langle \mathbb{N}; |; \mathrm{s} \rangle$, где $|$ интерпретируется как отношение делимости на $\mathbb{N}$. Ноль определим в этой структуре посредством

$$\Phi(x) \ := \ \neg x \mid x,$$

а отношение равенства на $\mathbb{N}$ — посредством

$$\Psi(x, y) \ := \ (\Phi(x) \wedge \Phi(y)) \vee (x \mid y \wedge y \mid x).$$

Джулией Робинсон было показано, что

*функции сложения и умножения на $\mathbb{N}$ определимы в $\langle \mathbb{N}; |; \mathrm{s} \rangle$.*

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ обозначим

$$\mathrm{supp}(n) \ := \ \text{множество всех простых делителей } n.$$

Гипотеза Эрдёша–Вудса заключается в следующем: найдётся $N \in \mathbb{N}$ такое, что для любых $i, j \in \mathbb{N}$,

$$\operatorname{supp}(i+n) = \operatorname{supp}(j+n) \quad \text{для всех} \quad n \in \{0, \ldots, N\} \qquad \Longrightarrow \qquad i = j.$$

Это известная открытая проблема.

**Пример (без доказательства)**

Теперь рассмотрим $\langle \mathbb{N}; \perp; \mathrm{s} \rangle$, где $\perp$ интерпретируется как отношение взаимной простоты на $\mathbb{N}$. Джоном Вудсом было показано, что следующие условия эквивалентны:

- отношение равенства на $\mathbb{N}$ определимо в $\langle \mathbb{N}; \perp; \mathrm{s} \rangle$;
- функции сложения и умножения на $\mathbb{N}$ определимы в $\langle \mathbb{N}; =, \perp; \mathrm{s} \rangle$;
- верна гипотеза Эрдёша–Вудса.

### Пример (доказательство должно быть на старших курсах)

Известно, что:

- всякое (вычислимо) перечислимое множество определимо в $\mathfrak{N}$;
- всякая частичная вычислимая функция определима в $\mathfrak{N}$.

Например, $\lambda n.[2^n]$ оказывается определима в $\mathfrak{N}$.

Этот пример связан со знаменитыми теоремами Гёделя о неполноте «достаточно богатых систем».

# «Метод автоморфизмов»

**Предложение**

*Пусть $S$ определимо в $\mathfrak{A}$. Тогда для любого $\xi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$,*

$$\xi[S] \subseteq S,$$

*т.е. $S$ замкнуто относительно автоморфизмов $\mathfrak{A}$.* □

**Замечание**

Это даёт необходимое, но далеко не достаточное усл. определимости. Так, если $\mathrm{Form}_\sigma$ счётно, $A$ бесконечно и $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A}) = \{\mathrm{id}_A\}$, то:

- всякое $S \subseteq A^\ell$ замкнуто относительно автоморфизмов $\mathfrak{A}$;
- множество всех определимых в $\mathfrak{A}$ множеств не более чем счетно;
- значит, существует $2^{|A|}$ замкнутых относительно автоморфизмов $\mathfrak{A}$, но не определимых в $\mathfrak{A}$ множеств.

**Пример**

В $\langle \mathbb{Z}; =; + \rangle$ не определимо обычное отношение порядка на $\mathbb{Z}$, так как $\lambda z.[-z]$ является автоморфизмом данной структуры.

**Пример**

С другой стороны, в $\langle \mathbb{Z}; < \rangle$ уже не определима функция сложения на $\mathbb{Z}$, так как $\lambda z.[z+1]$ является автоморфизмом данной структуры.

**Пример**

В $\mathfrak{D}$ нельзя определить никакой элемент, кроме 1.

## Пример (см. доп. упражнение из третьей лекции)

В $\mathfrak{G}$ нельзя определить:

- никакую конкретную фигуру за исключением $\varnothing$ и $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$;
- отношение «длина отрезка $xy$ равна единице»;
- отношение «вершины треуг. $xyz$ обходятся против час. стрелки».

(Здесь достаточно заметить, что движения и гомотетии, а также их композиции лежат в $\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{G})$.)

# О равенстве

Пусть $=$ содержится в $\mathrm{Pred}_\sigma$, причём $\mathrm{arity}_\sigma(=) = 2$.

$\sigma$-Структуру $\mathfrak{A}$ называют нормальной, если $=$ интерпретируется в $\mathfrak{A}$ как настоящее равенство, т.е. $=^{\mathfrak{A}}$ совпадает с $\mathrm{id}_A$.

## Замечание

С практической точки зрения, если мы работаем в рамках фиксированного языка, начинает стираться грань между:

- настоящим равенством, для разговора о котором необходимо выйти за пределы данного языка;
- неразличимостью средствами данного языка.

В математике роль отношения равенства нередко играет отношение эквивалентности специального типа.

Обозначим через Eq$_\sigma$ множество, состоящее из $\sigma$-предложений

- $\forall x\, x = x$,
- $\forall x\, \forall y\, (x = y \to y = x)$ и
- $\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x = y \wedge y = z \to x = z)$,

а также всех $\sigma$-предложений видов

- $\forall x_1\, \forall y_1\, \ldots\, \forall x_n\, \forall y_n\, (\vec{x} = \vec{y} \to (P\,(\vec{x}) \leftrightarrow P\,(\vec{y})))$ и
- $\forall x_1\, \forall y_1\, \ldots\, \forall x_m\, \forall y_m\, (\vec{x} = \vec{y} \to f\,(\vec{x}) = f\,(\vec{y}))$,

где $P \in \mathrm{Pred}_\sigma$ и $f \in \mathrm{Func}_\sigma$, причём $\mathrm{arity}_\sigma\,(P) = n$ и $\mathrm{arity}_\sigma\,(f) = m$. Под аксиомами равенства для $\sigma$ понимают элементы Eq$_\sigma$.

Разумеется, $\mathfrak{A} \Vdash \mathrm{Eq}_\sigma$ для всякой нормальной $\sigma$-структуры $\mathfrak{A}$. Мы докажем в некотором смысле «обратное утверждение».

Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная модель $\mathrm{Eq}_\sigma$.

Очевидно, $=^{\mathfrak{A}}$ будет отношением эквивалентности на $A$. Обозначим через $\mathfrak{A}'$ нормальную $\sigma$-структуру с носителем $A_{/=^{\mathfrak{A}}}$ такую, что:

- для любого $c \in \mathrm{Const}_\sigma$,

$$c^{\mathfrak{A}'} := \left[c^{\mathfrak{A}}\right];$$

- для любого $m$-местного $f \in \mathrm{Func}_\sigma$,

$$f^{\mathfrak{A}'}([a_1], \ldots, [a_m]) := \left[f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_m)\right];$$

- для любого $n$-местного $P \in \mathrm{Pred}_\sigma$,

$$([a_1], \ldots, [a_m]) \in P^{\mathfrak{A}'} \quad :\Longleftrightarrow \quad (a_1, \ldots, a_m) \in P^{\mathfrak{A}}.$$

(здесь $[a]$ — класс эквивалентности $a$ по $=^{\mathfrak{A}}$); корректность данного определения обеспечивают аксиомы равенства для $\sigma$.

### Теорема

*Для любых $\sigma$-формулы $\Phi$ и означивания $\nu$ в $\mathfrak{A}$,*

$$\mathfrak{A} \Vdash \Phi\,[\nu] \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{A}' \Vdash \Phi\,[\nu'].$$

*где $\nu'$ отображает каждую $x \in \mathrm{Var}$ в $[\nu\,(x)]$.*

### Доказательство.

Заметим, что для всех $t \in \mathrm{Term}_\sigma$,

$$\overline{\nu}'\,(t) \;=\; [\overline{\nu}\,(t)]$$

(это доказывается простой индукцией по построению $t$). Теперь идёт несложная индукция по построению $\Phi$. . . .

### Доказательство (продолжение).

Пусть $\Phi = P(t_1, \ldots, t_n)$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \Vdash \Phi[\nu] &\iff (\overline{\nu}(t_1), \ldots, \overline{\nu}(t_n)) \in P^{\mathfrak{A}} \\ &\iff ([\overline{\nu}(t_1)], \ldots, [\overline{\nu}(t_n)]) \in P^{\mathfrak{A}'} \\ &\iff (\overline{\nu}'(t_1), \ldots, \overline{\nu}'(t_n)) \in P^{\mathfrak{A}'} \\ &\iff \mathfrak{A}' \Vdash \Phi[\nu']. \end{aligned}$$

Остальные случаи — в качестве упражнения. □

## Следствие

*Для каждого* $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ *следующие условия эквивалентны:*

- *у* $\Gamma$ *есть нормальная модель;*
- *у* $\Gamma \cup \mathrm{Eq}_\sigma$ *есть модель.* $\square$

Отныне будет предполагаться, что все рассматриваемые $\sigma$-структуры нормальны, если явным образом не оговорено обратное.

# Выполнимость и общезначимость

$\sigma$-Формулу $\Phi$ называют:

- **выполнимой**, если $\mathfrak{A} \Vdash \Phi\,[\nu]$ для некоторых $\mathfrak{A}$ и $\nu$;
- **общезначимой**, если $\mathfrak{A} \Vdash \Phi\,[\nu]$ для всех $\mathfrak{A}$ и $\nu$.

Здесь подразумевается, что $\mathfrak{A}$ бегает по $\sigma$-структурам, тогда как $\nu$ — по означиваниям в $\mathfrak{A}$. Очевидно,

$$\Phi \text{ общезначима} \iff \neg\Phi \text{ не выполнима.}$$

**Теорема (Чёрча; должно быть на старших курсах)**

*Проблема выполнимости для кванторной кл. логики в сигнатуре $\langle R^2 \rangle$ алгоритмически неразрешима.*

### Замечание

Пусть $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$, и $x_1, \ldots, x_\ell$ суть в точности все элементы $\mathrm{FV}(\Phi)$ в порядке их появления в $\Phi$. Обозначим

$$\widetilde{\forall}\Phi \ := \ \forall x_1 \ldots \forall x_\ell\, \Phi \quad \text{и} \quad \widetilde{\exists}\Phi \ := \ \exists x_1 \ldots \exists x_\ell\, \Phi.$$

Тогда $\widetilde{\forall}\Phi$ называют универсальным замыканием $\Phi$, а $\widetilde{\exists}\Phi$ — экзистенциальным замыканием $\Phi$. Ясно, что для каждой $\mathfrak{A}$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \Vdash \widetilde{\forall}\Phi \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathfrak{A} \Vdash \Phi\,[\nu] \ \text{ для всех } \nu; \\ \mathfrak{A} \Vdash \widetilde{\exists}\Phi \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathfrak{A} \Vdash \Phi\,[\nu] \ \text{ для некоторого } \nu. \end{aligned}$$

Стало быть, имеют место следующие эквивалентности:

$$\begin{aligned} \Phi \ \text{ выполнима} \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathfrak{A} \Vdash \widetilde{\exists}\Phi \ \text{ для некоторой } \mathfrak{A}; \\ \Phi \ \text{ общезначима} \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathfrak{A} \Vdash \widetilde{\forall}\Phi \ \text{ для всех } \mathfrak{A}. \end{aligned}$$

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ и $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$. Говорят, что $\Phi$ семантически следует из $\Gamma$, и пишут $\Gamma \vDash \Phi$, если для любой $\mathfrak{A}$,

$$\mathfrak{A} \Vdash \Gamma \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{A} \Vdash \widetilde{\forall}\Phi.$$

Вместо $\varnothing \vDash \Phi$ обычно пишут $\vDash \Phi$. Очевидно,

$$\vDash \Phi \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi \text{ общезначима.}$$

Наконец, формулы $\Phi$ и $\Psi$ называют семантически эквивалентными, если $\vDash \Phi \leftrightarrow \Psi$; при этом пишут $\Phi \equiv \Psi$.

**Пример**

Для любых $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$ и $x \in \mathrm{Var}$,

$$\neg\forall x\, \Phi \;\equiv\; \exists x\, \neg\Phi \quad \text{и} \quad \neg\exists x\, \Phi \;\equiv\; \forall x\, \neg\Phi.$$

$\sigma$-Формула $\Phi$ называется бескванторной, если $\forall \not\preccurlyeq \Phi$ и $\exists \not\preccurlyeq \Phi$.

Под пренексными нормальными формами, сокр. п.н.ф., понимаются $\sigma$-формулы вида

$$\mathrm{Q}_1 x_1 \,\ldots\, \mathrm{Q}_\ell x_\ell\, \Psi,$$

где $\{\mathrm{Q}_1, \ldots, \mathrm{Q}_\ell\} \subseteq \{\forall, \exists\}$, $\{x_1, \ldots, x_\ell\} \subseteq \mathrm{Var}$ и $\Psi$ бескванторная.

**Упражнение**

*Всякая $\sigma$-формула семантически эквивалентна некоторой п.н.ф.*