Основы математической логики: 7/8

Станислав Олегович Сперанский

ФМКН СПбГУ

Санкт-Петербург 2021

Теорема (о корректности)

Для любых $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ *и* $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$,

$$\Gamma \vdash \Phi \quad \Longrightarrow \quad \Gamma \models \Phi.$$

Доказательство.

Пусть $\Gamma \vdash \Phi$. Зафиксируем какой-нибудь вывод

$$\Phi_0, \ \ldots, \ \Phi_n \ = \ \Phi$$

из Γ. Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная модель Γ. Покажем индукцией по $i \in \{0, \ldots, n\}$, что $\mathfrak{A} \Vdash \Phi_i\,[\nu]$ для всякого означивания ν в $\mathfrak{A}$. . . .

Доказательство (продолжение).

Возможны следующие случаи.

- Пусть Φ_i — аксиома. Тогда $\vDash \Phi_i$, а потому $\Gamma \vDash \Phi_i$.
- Пусть Φ_i — элемент Γ. Тогда, очевидно, $\mathfrak{A} \Vdash \Phi_i\,[\nu]$ для всех ν.
- Пусть Φ_i получается из предшествующих Φ_j и $\Phi_k = \Phi_j \to \Phi_i$ по MP. В силу индукционной гипотезы, для всякого ν,

$$\mathfrak{A} \Vdash \Phi_j\,[\nu] \quad \text{и} \quad \mathfrak{A} \Vdash \Phi_j \to \Phi_i\,[\nu],$$

  откуда немедленно следует $\mathfrak{A} \Vdash \Phi_i\,[\nu]$.

...

Доказательство (продолжение).

- Пусть $\Phi_i = \Theta \to \forall x\, \Omega$ получается из предш. $\Phi_j = \Theta \to \Omega$ по BR1. Рассмотрим произв. означивание ν. Заметим, что

$$\mathfrak{A} \Vdash \Theta\,[\nu] \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{A} \Vdash \Theta\,[\nu_a^x] \quad \text{для всех} \quad a \in A$$

(так как $x \notin \mathrm{FV}\,(\Theta)$). Кроме того, ввиду индукционной гипотезы мы имеем $\mathfrak{A} \Vdash \Theta \to \Omega\,[\nu_a^x]$. Итак,

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \Vdash \Theta\,[\nu] \quad &\Longrightarrow \quad \mathfrak{A} \Vdash \Theta\,[\nu_a^x] \quad \text{для всех} \quad a \in A \\ &\Longrightarrow \quad \mathfrak{A} \Vdash \Omega\,[\nu_a^x] \quad \text{для всех} \quad a \in A \\ &\Longrightarrow \quad \mathfrak{A} \Vdash \forall x\, \Omega\,[\nu]. \end{aligned}$$

Стало быть, $\mathfrak{A} \Vdash \Phi_i\,[\nu]$.

- Случай BR2 по существу аналогичен случаю BR1.

В частности, $\mathfrak{A} \Vdash \Phi\,[\nu]$ для всякого означивания ν в $\mathfrak{A}$.

Таким образом, $\Gamma \vDash \Phi$. □

Следствие

Для любой $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$, *если* $\vdash \Phi$, *то* $\models \Phi$. $\square$

$\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ называют **противоречивым**, если $\Gamma \vdash \Phi$ и $\Gamma \vdash \neg\Phi$ для некоторой $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$, и **непротиворечивым** иначе.

Замечание

Для $\Gamma \subseteq \mathrm{Form}_\sigma$ следующие условия эквивалентны:

1. $\Gamma \vdash \Psi$ для всех $\Psi \in \mathrm{Form}_\sigma$;
2. Γ противоречиво;
3. $\Gamma \vdash \bot$.

(Ср. аналогичное утверждение в пропозициональной логике.) $\square$

Следствие

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ *и* $\Phi \in \mathrm{Sent}_\sigma$.

- *Если у* Γ *есть модель, то* $\Gamma \nvdash \perp$.
- *Если у* $\Gamma \cup \{\Phi\}$ *есть модель, то* $\Gamma \nvdash \neg\Phi$.
- *Если у* $\Gamma \cup \{\neg\Phi\}$ *есть модель, то* $\Gamma \nvdash \Phi$. $\square$

Это, пожалуй, самый базовый метод доказательства непротиворечивости теорий и независимости предложений от теории.

Пример

Пусть в качестве σ выступает $\langle =^2; \mathsf{s}^1; 0 \rangle$, а Γ состоит из

- $\forall x\, \mathsf{s}(x) \neq 0$,
- $\forall x\, \forall y\, (\mathsf{s}(x) = \mathsf{s}(y) \to x = y)$ и
- $\forall x\, (x \neq 0 \to \exists y\, x = \mathsf{s}(y))$.

Обозначим через $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ естественные σ-структуры с носителями $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ соответственно (считая $\mathsf{s}^{\mathfrak{B}}(\infty) = \infty$). Возьмём

$$\Phi \;:=\; \forall x\, \mathsf{s}(x) \neq x.$$

Тогда $\mathfrak{A} \Vdash \Gamma \cup \{\Phi\}$ и $\mathfrak{B} \Vdash \Gamma \cup \{\neg\Phi\}$, а значит, Φ независима от Γ.

Пример (без деталей)

Пусть σ — это сигнатура структур $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{H}$, т.е. $\langle =^2, \cong^4, B^3 \rangle$. σ-Предложения, формализующие постулаты геометрии Евклида без постулата о параллельных, обычно именуют аксиомами абсолютной геометрии; обозначим их через Abs. Тогда

$$\mathfrak{G} \Vdash \mathsf{Abs} \cup \{\mathsf{Euclid\_5}\} \quad \text{и} \quad \mathfrak{H} \Vdash \mathsf{Abs} \cup \{\neg\mathsf{Euclid\_5}\}.$$

Значит, Euclid_5 (аксиома о параллельных) независима от Abs.

В дальнейшем, когда это не приводит к путанице, мы будем нередко отождествлять σ с $\mathrm{Pred}_\sigma \cup \mathrm{Func}_\sigma \cup \mathrm{Const}_\sigma$ (учитывая роли символов и их местности). В частности:

- запись $\varepsilon \in \sigma$ является сокр. для $\varepsilon \in \mathrm{Pred}_\sigma \cup \mathrm{Func}_\sigma \cup \mathrm{Const}_\sigma$;
- запись $\sigma \subseteq \sigma'$ означает, что

$$\mathrm{Pred}_\sigma \subseteq \mathrm{Pred}_{\sigma'}, \quad \mathrm{Func}_\sigma \subseteq \mathrm{Func}_{\sigma'} \quad \text{и} \quad \mathrm{Const}_\sigma \subseteq \mathrm{Const}_{\sigma'},$$

  причём arity_σ совпадает с сужением $\mathrm{arity}_{\sigma'}$ на $\mathrm{Pred}_\sigma \cup \mathrm{Func}_\sigma$.
- под $|\sigma|$ подразумевается $|\mathrm{Pred}_\sigma \cup \mathrm{Func}_\sigma \cup \mathrm{Const}_\sigma|$.

Пусть даны σ-структура $\mathfrak{A}$ и σ'-структура $\mathfrak{A}'$, причём σ' *включает* σ. Говорят, что $\mathfrak{A}$ является σ-обеднением $\mathfrak{A}'$, а $\mathfrak{A}'$ — σ'-обогащением $\mathfrak{A}$, если $A = A'$ и $\varepsilon^{\mathfrak{A}} = \varepsilon^{\mathfrak{A}'}$ для всех $\varepsilon \in \sigma$.

По поводу «абсолютной» выводимости

Мы уже знаем, что для установления *невыводимости* предложения Φ в теории Γ достаточно предъявить какую-нибудь модель Γ, в которой Φ ложно. Тут возникает естественный вопрос:

> *Почему мы отождествляем интуитивную выводимость с форм. выводимостью в рамках нашего исчисления?*

В случае вышеупомянутого метода дела обстоят просто: всякое адекватное исчисление должно быть корректным, а потому одна и та же контрмодель годится для всех адекватных исчислений; значит, здесь устан. «абсолютная», а не «относительная» невыводимость.

В общем случае можно дать следующий ответ.

- Формальная выводимость (в нашем или любом другом адекватном исчислении) влечёт интуитивную; иначе формальная выводимость окажется сильнее интуитивной.
- Интуитивная выводимость должна сохранять истинность, т.е. влечёт семант. следование, откуда *при усл. сильной полноты исчисления* мы получаем формальную выводимость.

К сожалению, доказательство теоремы о сильной полноте для квант. исчисления уже выходит за рамки нашего скромного модуля; однако ниже описана общая идея её доказательства.

Идея доказательства сильной полноты

Пусть $\Gamma \nvdash \Phi$. Хотим показать, что $\Gamma \not\models \Phi$.

Заметим, что $\Gamma \nvdash \Phi$ равносильно $\Gamma \nvdash \widetilde{\forall}\,\Phi$, а $\Gamma \not\models \Phi$ — $\Gamma \not\models \widetilde{\forall}\,\Phi$. Теперь действуем по аналогиии с пропозициональной логикой:

- Построим «насыщенную теорию» $\Gamma' \supseteq \Gamma$ такую, что $\Gamma' \nvdash \widetilde{\forall}\,\Phi$; при этом $\Gamma' \nvdash \widetilde{\forall}\,\Phi$ будет равносильно $\widetilde{\forall}\,\Phi \notin \Gamma'$.
- Далее, с помощью Γ' построим структуру $\mathfrak{A}_{\Gamma'}$ такую, что для любого предложения Ψ,

$$\mathfrak{A}_{\Gamma'} \Vdash \Psi \quad \Longleftrightarrow \quad \Psi \in \Gamma'.$$

Мы получим $\mathfrak{A}_{\Gamma'} \Vdash \Gamma$ и $\mathfrak{A}_{\Gamma'} \nVdash \widetilde{\forall}\,\Phi$. Стало быть, $\Gamma \not\models \widetilde{\forall}\,\Phi$.

Для удобства обозначим

$$\mathrm{Term}^{\circ}_{\sigma} \;:=\; \{t \in \mathrm{Term}_{\sigma} \mid \mathrm{sub}\,(t) \cap \mathrm{Var} = \varnothing\}.$$

Элементы $\mathrm{Term}^{\circ}_{\sigma}$ называют замкнутыми σ-термами. В определении «насыщенности» в логике первого порядка используется естественный кванторный аналог дизъюнктивного свойства:

- для любого $\exists x\,\Phi \in \Gamma$ сущ. $t \in \mathrm{Term}^{\circ}_{\sigma}$ такой, что $\Phi\,(x/t) \in \Gamma$.

Однако реализовать данное свойство в исходной сигнатуре σ порой невозможно. Так, если $\mathrm{Const}_{\sigma} = \varnothing$, то $\mathrm{Term}^{\circ}_{\sigma} = \varnothing$, а потому «насыщенных σ-теорий» вообще не существует.

Значит, придётся обогащать σ, добавляя новые константы.

Теорема (о сильной полноте $\vdash$; без доказательства)

Для любых $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ *и* $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$,

$$\Gamma \vdash \Phi \iff \Gamma \vDash \Phi.$$

В частности, $\Gamma \nvdash \perp$, *если и только если* $\Gamma \nvDash \perp$, *а значит,* Γ *непротиворечиво, если и только если у* Γ *есть модель.*

Замечание

Под **мощностью** $\mathfrak{A}$ традиционно понимают мощность носителя $\mathfrak{A}$, т.е. $|A|$. Далее мы убедимся, что т. о сильной полноте $\vdash$ остаётся верной, если ограничиться рассмотрением σ-структур мощности $\leqslant |\mathrm{Form}_\sigma|$.

Основные следствия

Мы определяли $\vdash$ для фиксированной сигнатуры σ. По этой причине правильнее говорить о выводимости над σ, а не просто выводимости (без указания сигнатуры), и писать $\vdash_\sigma$ вместо $\vdash$.

Теорема (о консервативности)

Пусть $\sigma \subseteq \sigma'$. Тогда для любых $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ и $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$,

$$\Gamma \vdash_\sigma \Phi \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \vdash_{\sigma'} \Phi.$$

Доказательство.

Как лего убедиться, $\Gamma \vDash_\sigma \Phi$ равносильно $\Gamma \vDash_{\sigma'} \Phi$, где $\vDash_\sigma$ и $\vDash_{\sigma'}$ — это семантические следования над σ и σ' соответственно. Значит,

$$\Gamma \vdash_\sigma \Phi \iff \Gamma \vDash_\sigma \Phi \iff \Gamma \vDash_{\sigma'} \Phi \iff \Gamma \vdash_{\sigma'} \Phi$$

(ввиду теоремы о сильной полноте для $\vdash_\sigma$ и $\vdash_{\sigma'}$). $\square$

Замечание

Тут хватит слабой полноты, т.к. $\vdash$ компактно и монотонно.

Теорема (о слабой полноте $\vdash$)

Для любой $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$,

$$\vdash \Phi \quad \Longleftrightarrow \quad \vDash \Phi,$$

т.е. выводимость из $\varnothing$ *равносильна общезначимости.* $\square$

Теорема (о компактности $\vDash$, a.k.a. локальная т. Гёделя–Мальцева)

Для любых $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ *и* $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$,

$$\Gamma \vDash \Phi \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta \vDash \Phi \quad \text{для некоторого конечного } \Delta \subseteq \Gamma.$$

В частности, $\Gamma \nvDash \bot$, *е.т.е.* $\Delta \nvDash \bot$ *для всех конечных* $\Delta \subseteq \Gamma$, *а значит,* Γ *выполнимо, е.т.е. всякое конечное подмножество* Γ *выполнимо.* $\square$

слабая полнота $\vdash$ плюс компактность $\vDash$ равно сильная полнота $\vdash$

Замечание

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$. Говорят, что Γ локально выполнимо, если всякое конечное подмножество Γ выполнимо. Стало быть,

$$\Gamma \text{ выполнимо} \iff \Gamma \text{ локально выполнимо};$$

отсюда «локальная» в альтернативном названии. К слову, локальная выполнимость влечёт непротиворечивость по т. о корректности.

С помощью теоремы о компактности для $\vDash$ можно получить немало интересных результатов. Например:

Предложение

Пусть у $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ есть модели сколь угодно большой конечной мощности. Тогда у Γ есть бесконечная модель.

Доказательство.

Не ограничивая общности, мы будем считать, что Pred_σ содержит $=$. Для каждого $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ положим

$$\Phi_n \;:=\; \exists x_1 \ldots \exists x_n \bigwedge_{i=1}^{n-1} \bigwedge_{j=i+1}^{n} \neg x_i = x_j.$$

Очевидно, для любой σ-структуры $\mathfrak{A}$,

$$\mathfrak{A} \Vdash \Phi_n \quad\Longleftrightarrow\quad |A| \geqslant n.$$

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ удовлетворяет условию предложения. Рассмотрим

$$\Gamma' \;:=\; \Gamma \cup \{\Phi_n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}\}.$$

Разумеется, Γ' локально выполнимо. Значит, оно выполнимо, т.е. у Γ' есть модель $\mathfrak{A}$. Поскольку в $\mathfrak{A}$ истинны все Φ_n, то A бесконечно. $\square$