Основы математической логики: 8/8

Станислав Олегович Сперанский

ФМКН СПбГУ

Санкт-Петербург 2021

О подструктурах

Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — σ-структуры. Говорят, что $\mathfrak{A}$ явл. подструктурой $\mathfrak{B}$, а $\mathfrak{B}$ — расширением $\mathfrak{A}$, и пишут $\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{B}$, если $A \subseteq B$ и id_A является вложением $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$. Итак, $\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда:

- $c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}}$ для каждого $c \in \mathrm{Const}_\sigma$;
- $f^{\mathfrak{A}} = f^{\mathfrak{B}} \restriction_{A^m}$ для каждого m-местного $f \in \mathrm{Func}_\sigma$;
- $P^{\mathfrak{A}} = P^{\mathfrak{B}} \cap A^n$ для каждого n-местного $P \in \mathrm{Pred}_\sigma$.

Понятно, что $S \subseteq B$ является носителем (некоторой) подструктуры $\mathfrak{B}$, если и только если:

i. $c^{\mathfrak{B}} \in S$ для каждого $c \in \mathrm{Const}_\sigma$;

ii. $f^{\mathfrak{B}}[S^m] \subseteq S$ для каждого m-местного $f \in \mathrm{Func}_\sigma$.

Замечание

В случае, когда $S \subseteq B$ удовлетворяет (i–ii), соотв. подструктура определяется однозначно; поэтому *подструктуры нередко отождествляют с их носителями* при условии, что объемлющая $\mathfrak{B}$ фиксирована.

Пример

Пусть $\mathfrak{A}$ — ч.у.м. Тогда все подструктуры $\mathfrak{A}$ также суть ч.у.м. Кроме того, такие свойства как линейность и фундированность будут наследоваться при переходе к подструктурам.

Пример

Пусть $\mathfrak{A}$ — абелева группа в сигнатуре $\langle =; +^2, -^1; 0 \rangle$. Тогда подструктуры $\mathfrak{A}$ суть в точности подгруппы $\mathfrak{A}$. Без $-$ в сигнатуре, однако, это было бы неверно, поскольку могут отсутствовать обратные.

Говорят, что $\mathfrak{A}$ явл. элементарной подструктурой $\mathfrak{B}$, а $\mathfrak{B}$ — элементарным расширением $\mathfrak{A}$, и пишут $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$, если $\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{B}$ и для любых $\Phi(x_1, \ldots, x_k) \in \mathrm{Form}_\sigma$ и $(a_1, \ldots, a_k) \in A^k$,

$$\mathfrak{A} \Vdash \Phi[\vec{x}/\vec{a}] \iff \mathfrak{B} \Vdash \Phi[\vec{x}/\vec{a}].$$

Очевидно, $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$ влечёт $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) = \mathrm{Th}(\mathfrak{B})$.

Теорема (Лёвенгейма–Сколема, о понижении мощности)

У всякой σ-структуры есть элем. подструктура мощности $\leqslant |\mathrm{Form}_\sigma|$.

Доказательство.

Возьмём $\kappa := |\mathrm{Form}_\sigma|$. Не ограничивая общности, мы будем считать, что Pred_σ содержит $=$. ...

Доказательство (продолжение).

Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная σ-структура. Для любых $\Phi(x_1, \ldots, x_k, y) \in \mathrm{Form}_\sigma$ и $(a_1, \ldots, a_k) \in A^k$ положим

$$[\![\Phi(\vec{a}, y)]\!] \;:=\; \{a \in A \mid \mathfrak{A} \Vdash \Phi[\vec{x}/\vec{a}, y/a]\}.$$

Определим последовательность $\langle S_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ подмножеств A следующим образом.

a. Если $n = 0$, то S_n — некоторое фиксированное подмножество A мощности $\leqslant \kappa$.

b. Если $n = m + 1$, то $S_n := S_m \cup \mathrm{range}\, \eta_m$, где η_m — какая-нибудь функция выбора для

$$\{[\![\Phi(\vec{a}, y)]\!] \mid \vec{a} \in S_m^* \text{ и } \mathfrak{A} \Vdash \exists y\, \Phi[\vec{x}/\vec{a}]\}.$$

...

Доказательство (продолжение).

По построению мы имеем $S_0 \subseteq S_1 \subseteq S_2 \subseteq \ldots$ Возьмём

$$S \;:=\; \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n.$$

Понятно, что для любых $\Phi(x_1, \ldots, x_k, y) \in \mathrm{Form}_\sigma$ и $(a_1, \ldots, a_k) \in S^k$,

$$\mathfrak{A} \Vdash \exists y\, \Phi[\vec{x}/\vec{a}] \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{A} \Vdash \Phi[\vec{x}/\vec{a}, y/a] \;\text{ для некот. }\; a \in S. \qquad (*)$$

Далее, S является носителем некоторой подструктуры $\mathfrak{A}$:

- для каждого $c \in \mathrm{Const}_\sigma$ верно $\mathfrak{A} \Vdash \exists y\; c = y$, откуда $c^{\mathfrak{A}} \in S$;
- для каждого m-местного $f \in \mathrm{Func}_\sigma$ и любого $\vec{a} \in S^m$ имеет $\mathfrak{A} \Vdash \exists y\, f(\vec{x}) = y\, [\vec{x}/\vec{a}]$, а потому $f^{\mathfrak{A}}(\vec{a}) \in S$.

...

Доказательство (продолжение).

Обозначим через $\mathfrak{S}$ подструктуру $\mathfrak{A}$ с носителем S. Заметим, что

$$|S_n| \leqslant \kappa \quad \text{для всех} \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Это легко установить по индукции:

- очевидно, $|S_0| \leqslant \kappa$;
- если $|S_n| \leqslant \kappa$, то $|S_{n+1}| \leqslant |S_n| + |\mathrm{Form}_\sigma| \cdot |S_n^*| \leqslant \kappa + \kappa \cdot \kappa = \kappa$.

Отсюда $|S| = \left|\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n\right| \leqslant \aleph_0 \cdot \kappa = \kappa$.

Наконец, используя $(*)$, нетрудно показать индукцией по построению $\Phi(x_1, \ldots, x_k) \in \mathrm{Form}_\sigma$, что для любых $(a_1, \ldots, a_k) \in S^k$,

$$\mathfrak{S} \Vdash \Phi[\vec{x}/\vec{a}] \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{A} \Vdash \Phi[\vec{x}/\vec{a}].$$

Таким образом, $\mathfrak{S} \preccurlyeq \mathfrak{A}$. □

Следствие

Для всякого $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$,

$$\text{у } \Gamma \text{ есть модель} \iff$$
$$\text{у } \Gamma \text{ есть модель мощности не более чем } |\mathrm{Form}_\sigma|.$$

$\square$

Вместе с тем, в силу теоремы о сильной полноте $\vdash$, мы можем заменить «у Γ есть модель» на «Γ непротиворечиво».

Упражнение

$|\mathrm{Form}_\sigma| = \max\{|\mathrm{Pred}_\sigma|, |\mathrm{Func}_\sigma|, |\mathrm{Const}_\sigma|, \aleph_0\} = \max\{|\sigma|, \aleph_0\}$.

Пример

В случае, когда $|\sigma| \leqslant \aleph_0$, мы имеем

$$\Gamma \text{ непротиворечиво} \iff$$
$$\text{у } \Gamma \text{ есть не более чем счётная модель.}$$

Получается следующее:

- у множества всех предложений, истинных в стандартной модели геометрии $\mathfrak{G}$, есть счётная модель;
- у множества всех предложений, истинных в стандартном кольце $\mathfrak{R}$ с носителем $\mathbb{R}$, есть счётная модель;
- у ZFC есть счётная модель (если ZFC непротиворечива).

Следствие

Для всякого $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ *следующие условия эквивалентны:*

i. *у* Γ *есть бесконечная модель;*

ii. *для каждого кардинала* $\kappa \geqslant |\mathrm{Sent}_\sigma|$ *у* Γ *есть модель мощности* κ*.*

Доказательство.

Не ограничивая общности, мы будем считать, что Pred_σ содержит $=$.

$\boxed{\text{ii} \Longrightarrow \text{i}}$ Очевидно. ...

Доказательство (продолжение).

$\boxed{\text{i} \Longrightarrow \text{ii}}$ Пусть у Γ есть бесконечная модель, и $\kappa \geqslant |\mathrm{Sent}_\sigma|$. Зафиксируем какое-нибудь множество S мощности κ. Обозначим

$$\sigma_S \;:=\; \sigma \cup \{\underline{s} \mid s \in S\},$$

где $\underline{s}$ суть новые (попарно различные) константные символы, не принадлежащие Const_σ; формально σ_S задаётся равенствами

$$\mathrm{Const}_{\sigma_S} \;=\; \mathrm{Const}_\sigma \cup \{\underline{s} \mid s \in S\},$$

$$\mathrm{Func}_{\sigma_S} \;=\; \mathrm{Func}_\sigma, \quad \mathrm{Pred}_{\sigma_S} \;=\; \mathrm{Pred}_\sigma \quad \text{и} \quad \mathrm{arity}_{\sigma_S} \;=\; \mathrm{arity}_\sigma.$$

...

Доказательство (продолжение).

Рассмотрим σ_S-теорию

$$\Gamma' \ := \ \Gamma \cup \left\{ \underline{s_1} \neq \underline{s_2} \mid \{s_1, s_2\} \subseteq S \text{ и } s_1 \neq s_2 \right\}.$$

Легко видеть, что Γ' локально выполнимо. Значит, оно выполнимо, а потому у Γ' есть модель $\mathfrak{A}$ мощности не более чем $|\mathrm{Form}_{\sigma_S}| = \kappa$. При этом для любых $\{s_1, s_2\} \subseteq S$,

$$s_1 \ \neq \ s_2 \quad \Longrightarrow \quad \underline{s_1}^{\mathfrak{A}} \ \neq \ \underline{s_2}^{\mathfrak{A}};$$

отсюда $|A| \geqslant |S| = \kappa$. Стало быть, $|A| = \kappa$. Очевидно, σ-обеднение $\mathfrak{A}$ окажется моделью Γ мощности κ. □

Пример

У $\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ есть модели любой бесконечной мощности.

Postlude: Теоремы о неполноте

- В качестве беглого обзора может выступать лекция 14 в «МЛ I: Весна 2020»; подробности см. в «МЛ II: Осень 2020».

- Методы, используемые в доказательствах теорем о неполноте, подчеркивают тесную связь между выводимостью и вычислимостью. Например, в работах Гёделя появились «примитивно рекурсивные функции». Из них потом выросли «рекурсивные функции» — одна из формализаций вычислимости.

- Эти методы вдохновляли многих исследователей, в том числе Стивена Клини, Розу Петер и Алана Тьюринга.