Арифметики Робинсона и Пеано

Рассмотрим сигнатуру

$$\sigma_\star \ := \ \langle 0; \mathsf{s}, +, \times, \mathsf{exp}; \leqslant, = \rangle.$$

Под *арифметикой Робинсона* мы будем понимать $\sigma_\star$-теорию с равенством, обозначаемую RA и определяемую посредством следующих аксиом:

1. $\forall x\, \mathsf{s}\,(x) \neq 0$;
2. $\forall x\, \forall y\, (\mathsf{s}\,(x) = \mathsf{s}\,(y) \to x = y)$;
3. $\forall x\, x + 0 = x$;
4. $\forall x\, \forall y\, x + \mathsf{s}\,(y) = \mathsf{s}\,(x + y)$;
5. $\forall x\, x \times 0 = 0$;
6. $\forall x\, \forall y\, x \times \mathsf{s}\,(y) = x \times y + x$;
7. $\mathsf{exp}\,(0) = \mathsf{s}\,(0)$;
8. $\forall x\, \mathsf{exp}\,(\mathsf{s}\,(x)) = \mathsf{exp}\,(x) + \mathsf{exp}\,(x)$.
9. $\forall x\, (x \leqslant 0 \leftrightarrow x = 0)$;
10. $\forall x\, \forall y\, (x \leqslant \mathsf{s}\,(y) \leftrightarrow x \leqslant y \vee x = \mathsf{s}\,(y))$;
11. $\forall x\, 0 \leqslant x$;
12. $\forall x\, \forall y\, (\mathsf{s}\,(x) \leqslant y \leftrightarrow x \leqslant y \wedge x \neq y)$.

Арифметика Пеано, обозначаемая PA, получается посредством добавления к RA всех $\sigma_\star$-формул вида

$$\Phi\,(0, \vec{y}) \wedge \forall x\, (\Phi\,(x, \vec{y}) \to \Phi\,(\mathsf{s}\,(x), \vec{y})) \to \forall x\, \Phi\,(x, \vec{y}),$$

где x не входит в $\vec{y}$; множество таких формул называют *схемой аксиом индукции для* $\sigma_\star$. Под *стандартной моделью арифметики* подразумевается $\sigma_\star$-структура $\mathfrak{N}$ с носителем $\mathbb{N}$ и обычной интерпретацией для $\sigma_\star$.