Система аксиом Цермело–Франкеля с аксиомой выбора

В аксиомах теории множеств для записи переменных используются как строчные, так и прописные латинские буквы.

Аксиома экстенсиональности

Нередко можно услышать следующее: “Множество определяется своими элементами”. В нашей системе эта идея превращается в *аксиому экстенсиональности*:

$$\forall X\, \forall Y\, (\forall u\, (u \in X \leftrightarrow u \in Y) \to X = Y). \tag{Ext}$$

Аксиома пустого множества

Нет ничего проще, чем совокупность без единого элемента, существование которой нам гарантирует *аксиома пустого множества*:

$$\exists X\, \forall u\, (u \in X \leftrightarrow u \neq u). \tag{Empty}$$

Аксиома пары

Далее, наша система включает ряд аксиом, позволяющих получать новые множества из уже имеющихся. Простейшей из них является, пожалуй, *аксиома пары*:

$$\forall X\, \forall Y\, \exists Z\, \forall u\, (u \in Z \leftrightarrow (u = X \vee u = Y)). \tag{Pair}$$

Схема аксиом выделения

Группы однородных аксиом обычно называют *схемами*. Так, для каждого условия $\Phi\,(x)$ (возможно, с параметрами) имеется своя *аксиома выделения*:

$$\forall X\, \exists Y\, \forall u\, (u \in Y \leftrightarrow (u \in X \wedge \Phi\,(u))). \tag{Sep}$$

Аксиома объединения

Соединять множества в одно целое позволяет *аксиома объединения*:

$$\forall X\, \exists Y\, \forall u\, (u \in Y \leftrightarrow \exists v\, (v \in X \wedge u \in v)). \tag{Union}$$

Аксиома степени

Для того, чтобы сформулировать нашу следующую аксиому, удобно ввести сокращение

$$x \subseteq y \ :=\ \forall v\, (v \in x \to v \in y).$$

Если $X \subseteq Y$, то говорят, что X является *подмножеством* Y, или Y *включает* X. Если $X \subseteq Y$ и $X \neq Y$, то Y называют *собственным подмножеством* X, и временами пишут $X \subsetneq Y$. *Аксиома степени* гласит:

$$\forall X\, \exists Y\, \forall u\, (u \in Y \leftrightarrow u \subseteq X). \tag{Power}$$

Аксиома бесконечности

Рассмотрим условие

$$\operatorname{Ind}(x) \ := \ \varnothing \in x \wedge \forall u\, (u \in x \to u \cup \{u\} \in x).$$

Будем называть X *индуктивным*, если имеет место $\operatorname{Ind}(X)$. Интуитивно каждое индуктивное множество бесконечно. Поэтому сформулируем *аксиому бесконечности* так:

$$\exists X\, \operatorname{Ind}(X). \tag{Inf}$$

Схема аксиом подстановки

В нашей системе для каждого условия $\Phi(x, y)$ (возможно, с параметрами) имеется своя *аксиома подстановки*:

$$\begin{aligned} &\forall x\, \forall y_1\, \forall y_2\, ((\Phi(x, y_1) \wedge \Phi(x, y_2)) \to y_1 = y_2) \to \\ &\qquad\qquad \forall X\, \exists Y\, \forall y\, (y \in Y \leftrightarrow \exists x\, (x \in X \wedge \Phi(x, y))). \end{aligned} \tag{Repl}$$

Аксиома регулярности

Как увидим позже, значительное влияние на структуру универса всех множеств оказывает *аксиома регулярности*:

$$\forall X\, (X \neq \varnothing \to \exists u\, (u \in X \wedge X \cap u = \varnothing)). \tag{Reg}$$

Аксиома выбора

Особое место в нашей системе занимает *аксиома выбора*:

$$\forall X\, \Big(\varnothing \notin X \to \exists f\, \Big(f : X \to \bigcup X \wedge \forall u \in X\, (f(u) \in u)\Big)\Big). \tag{C}$$

Подробности см. в:
T. Jech. *Set Theory*. 3rd ed., revised and expanded. Springer, 2002.