1 Простейшие теоремы PA (в классе)

Упражнение 1. Выведите из 9, 10 с помощью индукции: $\forall x\, 0 \leqslant x$. *%11*

Упражнение 2. Выведите из 1, 2, 9, 10 с помощью индукции:

i. $\forall x\, \forall y\, (x \leqslant y \leftrightarrow \mathsf{s}\,(x) \leqslant \mathsf{s}\,(y))$;

ii. $\forall x\, \mathsf{s}\,(x) \nleqslant x$;

iii. $\forall x\, \forall y\, (\mathsf{s}\,(x) \leqslant y \leftrightarrow x \leqslant y \wedge x \neq y)$. *%12*

Упражнение 3. Выведите из 2 с помощью индукции: $\forall x\, (x \neq 0 \to \exists! y\, (x = \mathsf{s}\,(y)))$.

Упражнение 4. Выведите в PA:

i. $\forall x\, x \leqslant x$.

ii. $\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x \leqslant y \wedge y \leqslant z \to x \leqslant z)$;

iii. $\forall x\, \forall y\, (x \leqslant y \wedge y \leqslant x \to x = y)$;

iv. $\forall x\, \forall y\, (x \leqslant y \vee y \leqslant x)$.

Упражнение 5. Выведите из 3 и 4: $\forall x\, \mathsf{s}\,(x) = x + \underline{1}$.

Упражнение 6. Выведите в PA:

i. $\forall x\, \forall y\, \forall z\, ((x + y) + z = x + (y + z))$;

ii. $\forall x\, \forall y\, (x + y = y + x)$.

Упражнение 7. Выведите в PA: $\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x \leqslant y \leftrightarrow x + z \leqslant y + z)$.[1]

Упражнение 8. Выведите в PA:

i. $\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x \times (y + z) = (x \times y + x \times z))$;

ii. $\forall x\, \forall y\, \forall z\, ((x + y) \times z = (x \times z + y \times z))$.

Упражнение 9. Выведите в PA:

i. $\forall x\, \forall y\, \forall z\, ((x \times y) \times z = x \times (y \times z))$;

ii. $\forall x\, \forall y\, (x \times y = y \times x)$.

[1] Используя свойства $\leqslant$, легко убедиться, что здесь можно заменить $\leqslant$ на $<$ или на $=$.

2 Простейшие теоремы PA (на дом)

Упражнение 1. Выведите в PA: $\forall x \, \forall y \, \forall z \, (z \neq 0 \to (x \leqslant y \leftrightarrow x \times z \leqslant y \times z))$.[2]

Упражнение 2. Выведите в PA: $\forall x \, \forall y \, \mathsf{exp}\,(x + y) = \mathsf{exp}\,(x) \times \mathsf{exp}\,(y)$.

Упражнение 3. Выведите в PA: $\forall x \, \forall y \, (x \leqslant y \leftrightarrow \mathsf{exp}\,(x) \leqslant \mathsf{exp}\,(y))$.

Упражнение 4. *Схема аксиом возвратной индукции* состоит из $\sigma_\star$-формул вида

$$\forall u \, ((\forall u < x) \, \Phi \, (u, \vec{y}) \to \Phi \, (x, \vec{y})) \to \forall x \, \Phi \, (x, \vec{y}),$$

где x не входит в $\vec{y}$. Докажите, что все такие формулы выводимы в PA.

Упражнение 5. Под *принципом минимального элемента* понимается схема $\sigma_\star$-формул вида:

$$\exists x \, \Phi \, (x, \vec{y}) \to \exists x \, (\Phi \, (x, \vec{y}) \wedge (\forall u < x) \, \neg \Phi \, (u, \vec{y})),$$

где x не входит в $\vec{y}$. Докажите, что все такие формулы выводимы в PA.

Упражнение 6. Покажите, что схему аксиом индукции можно вывести из принципа минимального элемента, если принять в качестве аксиом утверждение из упр. 3 и $\forall x \, x < \mathsf{s}\,(x)$.

Упражнение 7. Выведите в PA: $\forall x \, \forall y \, (x \leqslant y \leftrightarrow \exists z \, z + x = y)$.

Упражнение 8. Выведите в PA: $\forall x \, \forall y \, (y \neq 0 \to (\exists! u) \, (\exists! v < y) \, (y \times u + v = x))$.

Введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned} x \mid y \; &:= \; \exists z \, z \times x = y; \\ \mathrm{Irred}\,(x) \; &:= \; x \neq 0 \wedge x \neq \underline{1} \wedge \forall u \, (u \mid x \to u = \underline{1} \vee u = x); \\ \mathrm{Prime}\,(x) \; &:= \; x \neq 0 \wedge x \neq \underline{1} \wedge \forall u \, \forall v \, (x \mid u \times v \to x \mid u \vee x \mid v). \end{aligned}$$

Здесь используется «кольцевая» терминология (от англ. *irreducible* и *prime*).

Упражнение 9. Выведите в PA: $\forall x \, (\mathrm{Irred}\,(x) \leftrightarrow \mathrm{Prime}\,(x))$.

Упражнение 10. Выведите в PA: $\forall x \, (x \neq \underline{1} \to \exists u \, (\mathrm{Prime}\,(u) \wedge u \mid x))$.

Наконец, можно доказать бесконечность множества всех простых чисел:

Упражнение 11. Выведите в PA: $\forall x \, \exists y \, (\mathrm{Prime}\,(y) \wedge x < y)$.

Можно продолжить развивать элементарную теорию чисел в рамках PA: ввести н.о.д. и н.о.к., вывести соотношение Безу для натуральных чисел и так далее. Делать мы этого, конечно, не будем.

[2] Отсюда вытекает, например, следующее: $\forall x \, \forall y \, (y \neq 0 \to x \leqslant x \times y)$.

3 Простейшие метатеоремы RA: свойства порядка

Упражнение 1. Для любого $n \in \mathbb{N}$ выведите в RA: $\forall x\,(x \leqslant \underline{n} \leftrightarrow x = 0 \vee \cdots \vee x = \underline{n})$.

Упражнение 2. Для любого $n \in \mathbb{N}$ выведите в RA: $\forall x\,(\underline{n+1} \leqslant x \leftrightarrow x \neq 0 \wedge \cdots \wedge x \neq \underline{n})$.

Упражнение 3. Для любого $n \in \mathbb{N}$ выведите в RA: $\forall x\,(\neg x \leqslant \underline{n} \leftrightarrow \underline{n+1} \leqslant x)$.

Упражнение 4. Для всех $n, m \in \mathbb{N}$ выведите в RA:

i. $\forall x\,(x \leqslant \underline{n} \to x \leqslant \underline{m})$, если $n \leqslant m$;

ii. $\forall x\,\forall y\,(x \leqslant y \wedge y \leqslant \underline{n} \to x \leqslant \underline{n})$;

iii. $\forall x\,(\underline{m} \leqslant x \to \underline{n} \leqslant x)$, если $n \leqslant m$;

iv. $\forall x\,\forall y\,(\underline{n} \leqslant x \wedge x \leqslant y \to \underline{n} \leqslant y)$.

4 Краткий экскурс в теорию множеств

Аксиомы ZFC можно найти тут.

Упражнение 1. Докажите, что существует наименьшее по включению индуктивное множество; обозначим его через ω.

В рамках ZFC под 0 традиционно понимается пустое множество, а под s — функция из ω в ω, действующая по правилу

$$\mathsf{s}(n) \ := \ n \cup \{n\}.$$

Вместо $\mathsf{s}(n)$ часто пишут $n+1$. Под *порядком на* $\mathbb{N}$ мы будем понимать

$$< \ := \ \big\{(n,m) \in \mathbb{N}^2 \mid n \in m\big\}.$$

Операции $+$, $\times$ и exp на ω можно определить с помощью параметризованной рекурсии по ω (которая представляет собой весьма частный случай трансфинитной рекурсии).

Упражнение 2. Проверьте, что все аксиомы PA будут верны в данной теоретико-множественной интерпретации.[3]

Будем называть условие $\Phi(x,y)$ *функциональным*, если

$$\forall x\, \forall y_1\, \forall y_2\, ((\Phi(x,y_1) \wedge \Phi(x,y_2)) \to y_1 = y_2).^4$$

Пусть $\Phi(x,y)$ функционально и $\exists y\, \Phi(u,y)$; тогда $[\![\Phi]\!](u)$ будет обозначать то самое единственное y, которое удовлетворяет $\Phi(u,y)$. Наконец, в случае, когда $\forall x\, \exists y\, \Phi(x,y)$, будем говорить, что Φ *тотально*.

Упражнение 3 (простейшая версия теоремы о «классовой рекурсии")**.** Пусть y_0 — фиксированное множество, а $\Phi(x,y)$ — тотальное функциональное условие. Тогда существует и притом единственная функция f с $\operatorname{dom}(f) = \mathbb{N}$ такая, что $f(0) = y_0$, и для любого $n \in \mathbb{N}$,

$$f(n+1) \ = \ [\![\Phi]\!](f(n)).$$

[Докажите это.]

В частности, для каждого множества X можно определить последовательность

$$\begin{cases} \underline{X}_0 & := \ X, \\ \underline{X}_{n+1} & := \ \bigcup \underline{X}_n. \end{cases}$$

При этом, как легко убедиться,

$$\mathrm{TC}(X) \ := \ \bigcup_{n\in\omega} \underline{X}_n$$

является наименьшим по включению транзитивным надмножеством X; его традиционно называют *транзитивным замыканием* X.

---

[3] Очевидно, аксиомы с 3 по 8 проверять не нужно, поскольку они зашиты в определения $+$, $\times$ и exp на ω. Аксиомы 11 и 12 также проверять не нужно, поскольку они избыточны.

[4] Здесь под *условием* понимается произвольная формула в языке ZFC. При этом позволяется опускать параметры: формально вместо $\Phi(x,y)$ следовало бы написать $\Phi(x,y,\vec{u})$, где значения для переменных $\vec{u}$ подразумеваются фиксированными.

Упражнение 4 (бонус!)**.** Постройте множество X такое, что $\underline{X}_n \neq \mathrm{TC}(X)$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Обозначим через Z систему, полученную из ZFC путём отбрасывания Repl (или точнее, заменой Repl на Sep). Её нередко называют *системой Цермело.*

Упражнение 5. Покажите, что Repl нельзя вывести в Z.

Решение. Как мы знаем, рассуждая в рамках ZFC, можно построить бесконечную последовательность

$$\begin{cases} V_0 & := \varnothing, \\ V_{n+1} & := \mathcal{P}(V_n). \end{cases}$$

Далее, можно взять $V_\omega := \bigcup \{V_n \mid n \in \omega\}$, и построить последовательность

$$\begin{cases} V'_0 & := V_\omega, \\ V'_{n+1} & := \mathcal{P}(V'_n). \end{cases}$$

Вместо V'_n мы нередко будем писать $V_{\omega+n}$. Наконец, положим

$$A := \bigcup \{V_{\omega+n} \mid n \in \omega\}.$$

По индукции легко показать, что для любого $n \in \omega$,

$$V_n \subseteq \mathcal{P}(V_n) \quad \text{и} \quad V_{\omega+n} \subseteq \mathcal{P}(V_{\omega+n}).$$

Стало быть, для всякого $n \in \omega$,

$$\bigcup V_n \subseteq V_n \quad \text{и} \quad \bigcup V_{\omega+n} \subseteq V_{\omega+n},$$

т.е. все уровни данной иерархии транзитивны. В частности, отсюда выводится

$$\bigcup A \subseteq A,$$

т.е. само A также транзитивно. Рассмотрим структуру $\mathfrak{A} = \langle A; \in_A \rangle$, где

$$\in_A := \{(a_1, a_2) \in A \times A \mid a_1 \in a_2\}.$$

Транзитивность A гарантирует, что для всех $a \in A$,

$$a = \{a' \mid a' \in a\} = \{a' \in A \mid a' \in a\} = \{a' \in A \mid \mathfrak{A} \Vdash a' \in a\}.$$

Покажем теперь, что $\mathfrak{A} \Vdash \mathsf{Z}$, но $\mathfrak{A} \nVdash \mathsf{ZFC}$.

Проверка $\mathfrak{A} \Vdash \mathsf{Z}$ не должна составлять особого труда.

Допустим, что $\mathfrak{A} \Vdash \mathsf{ZFC}$. Тогда найдётся $f \in A$, которая выполняет в $\mathfrak{A}$ роль последовательности V'. Можно аккуратно проверить, что

$$\begin{cases} f_0 & = V_\omega, \\ f_{n+1} & = \mathcal{P}(f_n). \end{cases}$$

Поэтому $f = V'$, т.е. $V' \in A$, откуда $A \in A$ — противоречие. $\square$

На самом деле, в «нашем финитном мире» мы установили следующее:

$$\mathsf{ZFC} \vdash \text{«существует } \mathfrak{A} \text{ такая, что } \mathfrak{A} \Vdash \mathsf{Z}\text{, но } \mathfrak{A} \nVdash \Phi_\circ\text{»}, \tag{$*$}$$

где $\Phi_\circ$ — подходящая аксиома подстановки (которая обеспечивает существование V').

Поскольку ZFC такая сильная, то в «нашем финитном мире» для каждой формулы Φ в языке ZFC:

- если $\mathsf{Z} \vdash \Phi$, то $\mathsf{ZFC} \vdash$ «$\mathsf{Z} \vdash \Phi$»;
- $\mathsf{ZFC} \vdash$ «если $\mathsf{Z} \vdash \Phi$, то $\mathsf{Z} \vDash \Phi$».

Предположим, что в «нашем финитном мире» $\Phi_\circ$ выводимо из Z. Тогда $\mathsf{ZFC} \vdash$ «$\mathsf{Z} \vdash \Phi_\circ$», откуда $\mathsf{ZFC} \vdash$ «$\mathsf{Z} \vDash \Phi_\circ$». Вместе с $(*)$ это даёт противоречивость ZFC. Итак, «финитная» версия результата выше: если ZFC непротиворечива, то Repl нельзя вывести в Z.

Некоторые сведения об ординалах можно почерпнуть тут. Обозначим через Ord класс всех ординалов. Это собственный класс, т.е. множеством он не является. Когда α — ординал, мы пишем $\alpha \in \mathrm{Ord}$ или $\mathrm{Ord}\,(\alpha)$.

Для реализации достаточно серьёзных конструкций нужна:

Упражнение 6 (нормальная версия теоремы о трансфинитной классовой рекурсии)**.** Пусть $\Phi\,(x, y)$ — тотальное функциональное условие. Тогда можно построить функциональное условие $\Psi\,(x, y)$ такое, что $\forall x\,(\exists y\,\Psi\,(x, y) \leftrightarrow \mathrm{Ord}\,(x))$, и для любого $\alpha \in \mathrm{Ord}$,

$$[\![\Psi]\!]\,(\alpha) \;=\; [\![\Phi]\!]\,([\![\Psi]\!]\restriction_\alpha),$$

где $[\![\Psi]\!]\restriction_\alpha$ обозначает $\{(x, y) \mid x \in \alpha \wedge \Psi\,(x, y)\}$. Кроме того, класс-функция, которую задаёт Ψ, в известном (требующем уточнения) смысле единственна. [Докажите это.]

Построим функциональное условие Ψ такое, что для любого $\alpha \in \mathrm{Ord}$:

$$[\![\Psi]\!]\,(\alpha) \;=\; \begin{cases} \varnothing & \text{если } \alpha = 0, \\ \mathcal{P}\,([\![\Psi]\!]\,(\alpha - 1)) & \text{если } \alpha \text{ непредельный}, \\ \bigcup_{\beta<\alpha} [\![\Psi]\!]\,(\beta) & \text{если } \alpha \text{ предельный и ненулевой}. \end{cases}$$

Вместо $[\![\Psi]\!]\,(\alpha)$ традиционно пишут V_α. Иначе говоря,

$$\begin{cases} \mathrm{V}_0 \;=\; \varnothing \\ \mathrm{V}_{\beta+1} \;=\; \mathcal{P}\,(\mathrm{V}_\beta) & \text{для всех } \beta \\ \mathrm{V}_\gamma \;=\; \bigcup_{\beta<\gamma} \mathrm{V}_\beta & \text{для предельных } \gamma > 0. \end{cases}$$

Эта трансфинитная класс-последовательность называется *кумулятивной иерархией*, или *иерархией фон Неймана.*

Упражнение 7 (вспомогательное)**.** $\mathrm{V}_\alpha \subsetneq \mathcal{P}\,(\mathrm{V}_\alpha)$ для всякого $\alpha \in \mathrm{Ord}$.

Стало быть, каждое V_α транзитивно. Кроме того, можно легко доказать, что для любых $\alpha, \beta \in \mathrm{Ord}$,

$$\alpha \;<\; \beta \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{V}_\alpha \;\subsetneq\; \mathrm{V}_\beta.$$

Поэтому «кумулятивная» и «иерархия».

Упражнение 8. Докажите, что $\forall x\,\exists\alpha\,(\mathrm{Ord}\,(\alpha) \wedge x \in \mathrm{V}_\alpha)$. В несколько неформальной записи это можно представить так:

$$\mathbb{V} \;=\; \bigcup_{\alpha\in\mathrm{Ord}} \mathrm{V}_\alpha,$$

где $\mathbb{V}$ обозначает класс всех множеств.

Далее, упражнение 5 можно параметризовать. С помощью параметризованной версии легко определить, например, следующие класс-функции:

$$\begin{cases} \alpha + 0 \;=\; \alpha & \\ \alpha + (\beta+1) \;=\; (\alpha+\beta)+1 & \text{для всех } \beta \\ \alpha + \gamma \;=\; \sup\{\alpha+\beta \mid \beta<\gamma\} & \text{для предельных } \gamma > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha \cdot 0 \;=\; \alpha & \\ \alpha \cdot (\beta+1) \;=\; (\alpha\cdot\beta)+\alpha & \text{для всех } \beta \\ \alpha \cdot \gamma \;=\; \sup\{\alpha\cdot\beta \mid \beta<\gamma\} & \text{для предельных } \gamma > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha^0 \;=\; 1 & \\ \alpha^{\beta+1} \;=\; \alpha^\beta \cdot \alpha & \text{для всех } \beta \\ \alpha^\gamma \;=\; \sup\left\{\alpha^\beta \mid \beta<\gamma\right\} & \text{для предельных } \gamma > 0. \end{cases}$$

Стоит отметить, что на кардиналах соответствующие операции определяются совсем по-другому, хотя кардиналы и образуют подкласс ординалов.

5 Ординальная арифметика: сложение

Теорему о трансфинитной индукции можно сформулировать для ординалов:

Упражнение 1. Пусть $\Phi(x)$ — условие такое, что для любого $\alpha \in \mathrm{Ord}$,

$$\Phi(\beta) \quad \text{для всех } \beta < \alpha \quad \Longrightarrow \quad \Phi(\alpha).$$

Тогда $\Phi(\alpha)$ для всех $\alpha \in \mathrm{Ord}$.

В литературе часто встречается несколько иная формулировка:

Упражнение 2. Пусть $\Phi(x)$ — условие такое, что:

i. $\Phi(0)$

ii. если α — ординал, и $\Phi(\alpha)$, то $\Phi(\alpha + 1)$;

iii. если α — предельный ненулевой ординал, и $\Phi(\beta)$ для всех $\beta < \alpha$, то $\Phi(\alpha)$.

Тогда $\Phi(\alpha)$ для всех ординалов α.

С помощью трансфинитной индукции обычно доказывают свойства операций на Ord, а также разнообразные факты про трансфинитные класс-последовательности.

Упражнение 3. Для всех $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{Ord}$:

i. $\beta < \gamma \leftrightarrow \alpha + \beta < \alpha + \gamma$;

ii. $\beta = \gamma \leftrightarrow \alpha + \beta = \alpha + \gamma$.

Далее, нетрудно показать, что + «непрерывно по второй координате»:

Упражнение 4 (вспомогательное). Для любого непустого множества ординалов X,

$$\alpha + \sup X \;=\; \sup \{\alpha + \beta \mid \beta \in X\}.$$

Упражнение 5. Для всех $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{Ord}$: $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.

Упражнение 6. Для всех $\alpha, \beta \in \mathrm{Ord}$: $\alpha \leqslant \beta \leftrightarrow \exists \gamma\, (\mathrm{Ord}(\gamma) \wedge \alpha + \gamma = \beta)$.

Упражнение 7. Сложение на ординалах не коммутативно.

Упражнение 8 (вспомогательное). Для всех $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{Ord}$, если $\alpha \leqslant \beta$, то $\alpha + \gamma \leqslant \beta + \gamma$.

Пусть даны в.у.м. $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant_A \rangle$ и $\mathfrak{B} = \langle B, \leqslant_B \rangle$, причём $A \cap B = \varnothing$. Возьмём

$$\leqslant \;:=\; \leqslant_A \cup \leqslant_B \cup\, A \times B.$$

Тогда $\langle A \cup B, \leqslant \rangle$ — в.у.м., которое будет обозначаться $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$.

Упражнение 9. Пусть в.у.м. $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant_A \rangle$ и $\mathfrak{B} = \langle B, \leqslant_B \rangle$ изоморфны соответственно ординалам α и β, причём $A \cap B = \varnothing$. Тогда $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$ изоморфно $\alpha + \beta$.

6 Ординальная арифметика: умножение

Упражнение 1. Для всех $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{Ord}$:

i. $\alpha \neq 0 \to (\beta < \gamma \leftrightarrow \alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma)$;

ii. $\alpha \neq 0 \to (\beta = \gamma \leftrightarrow \alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \gamma)$.

Далее, нетрудно показать, что $\cdot$ «непрерывно по второй координате»:

Упражнение 2. Для любого непустого множества ординалов X,

$$\alpha \cdot \sup X \;=\; \sup \{\alpha \cdot \beta \mid \beta \in X\}.$$

Упражнение 3. Для всех $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{Ord}$:

i. $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$;

ii. $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$.

Упражнение 4. Умножение на ординалах не коммутативно.

Упражнение 5 (вспомогательное). Для всех $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{Ord}$, если $\alpha \leqslant \beta$, то $\alpha \cdot \gamma \leqslant \beta \cdot \gamma$.

Пусть даны в.у.м. $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant_A \rangle$ и $\mathfrak{B} = \langle B, \leqslant_B \rangle$. Определим $\leqslant$ на $A \times B$ по правилу

$$\langle a_1, b_1 \rangle \leqslant \langle a_2, b_2 \rangle \quad :\Longleftrightarrow \quad b_1 <_B b_2 \text{ или } (b_1 = b_2 \text{ и } a_1 \leqslant_A a_2).$$

Тогда $\langle A \times B, \leqslant \rangle$ — в.у.м., которое мы будем обозначать $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$.

Упражнение 6. Пусть в.у.м. $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant_A \rangle$ и $\mathfrak{B} = \langle B, \leqslant_B \rangle$ изоморфны соответственно ординалам α и β. Тогда $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ изоморфно $\alpha \cdot \beta$.

7 Ординальная арифметика: возведение в степень [из лекций]

Упражнение 1. Для всех $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{Ord}$:

i. $\alpha > 1 \to \big(\beta < \gamma \leftrightarrow \alpha^\beta < \alpha^\gamma\big)$;

ii. $\alpha > 1 \to \big(\beta = \gamma \leftrightarrow \alpha^\beta = \alpha^\gamma\big)$.

Далее, возведение в степень оказывается «непрерывно по второй координате»:

Упражнение 2. Пусть $\alpha \neq 0$. Тогда для любого непустого множества ординалов X,

$$\alpha^{\sup X} \; = \; \sup\Big\{\alpha^\beta \mid \beta \in X\Big\}.$$

Упражнение 3. Для всех $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{Ord}$:

i. $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$;

ii. $\big(\alpha^\beta\big)^\gamma = \alpha^{\beta\cdot\gamma}$.

Упражнение 4 (вспомогательное). Для всех $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{Ord}$, если $\alpha \leqslant \beta$, то $\alpha^\gamma \leqslant \beta^\gamma$.

У возведения в степень на ординалах тоже имеется «геометрическая» интерпретация, но у неё несколько громоздкая формулировка, и мы ей пользоваться не будем.

8 Про кардиналы (a.k.a. алефы)

Обозначим через Card класс всех кардиналов.

Упражнение 1. Для любого $\alpha \in \mathrm{Ord}$ существует $\kappa \in \mathrm{Card}$ такой, что $\alpha < \kappa$.

Упражнение 2. Докажите то же самое без использования аксиомы выбора (а значит, и без помощи теоремы Цермело).

Упражнение 3. Card не является множеством.

Упражнение 4. Пусть X — множество кардиналов. Тогда $\bigcup X$ — кардинал.

Для каждого $\kappa \in \mathrm{Card}$ обозначим

$$\kappa^+ \ := \ \text{наименьший из кардиналов, бóльших } \kappa.$$

В силу (самой общей версии) теоремы о трансфинитной рекурсии, мы можем построить функциональное условие Ψ такое, что для любого $\alpha \in \mathrm{Ord}$,

$$[\![\Psi]\!](\alpha) \ = \ \begin{cases} \aleph_0 & \text{если } \alpha = 0, \\ ([\![\Psi]\!](\alpha - 1))^+ & \text{если } \alpha \text{ непредельный}, \\ \sup\{[\![\Psi]\!](\beta) \mid \beta < \alpha\} & \text{если } \alpha \text{ предельный и ненулевой}. \end{cases}$$

Вместо $[\![\Psi]\!](\alpha)$ традиционно пишут $\aleph_\alpha$.

Упражнение 5. Для любых $\alpha, \beta \in \mathrm{Ord}$,

$$\alpha \ < \ \beta \quad \Longrightarrow \quad \aleph_\alpha \ < \ \aleph_\beta.$$

Упражнение 6. Для всякого бесконечного $\kappa \in \mathrm{Card}$ найдётся $\alpha \in \mathrm{Ord}$ такой, что $\kappa = \aleph_\alpha$.

Список литературы

[Hrbacek & Jech 1999] K. Hrbacek and T. Jech. *Introduction to Set Theory*. 3rd ed., revised and expanded. Marcel Dekker, Inc., 1999.

[Jech 2002] T. Jech. *Set Theory*. 3rd ed., revised and expanded. Springer, 2002.

[van Oosten 1999] J. van Oosten. *Introduction to Peano arithmetic*. Lecture notes. Utrecht University, 1999.