## По поводу ординалов и кардиналов

Будем называть $X$ *транзитивным*, если $\bigcup X \subseteq X$. Для произвольного $X$ возьмём

$$\in_X \ := \{(u, v) \in X \times X \mid u \in v\}.$$

Будем говорить, что $X$ является *ординалом*, если $X$ транзитивно и $\in_X$ — строгий полный порядок на $X$. Для обозначения ординалов используют $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ и их производные; вместо $\alpha \in \beta$ нередко пишут $\alpha < \beta$.

**Теорема.** *Пусть $X$ — ординал и $Y \in X$. Тогда $Y$ — ординал, причём*

$$Y \ = \ \{x \in X \mid x < Y\}.$$

*Таким образом, $X$ равен множеству всех ординалов, которые меньше его, и все начальные сегменты $(X, \in_X)$ суть ординалы.*

Альтернативное определение $<$ на классе всех ординалов даёт:

**Теорема.** *Для любых ординалов $\alpha$ и $\beta$,*

$$\alpha \in \beta \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha \subsetneq \beta.$$

Далее, используя эти результаты, можно доказать, что $<$ ведёт себя подобно строгому полному порядку на классе всех ординалов:

**Теорема.** *Для любых ординалов $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ верно следующее:*

*i.* $\alpha \not< \alpha$;

*ii.* *если* $\alpha < \beta$ *и* $\beta < \gamma$, *то* $\alpha < \gamma$;

*iii.* *либо* $\alpha = \beta$, *либо* $\alpha < \beta$, *либо* $\beta < \alpha$.

*Кроме того, для всякого непустого множества ординалов $X$ верно $\bigcap X \in X$; при этом $\bigcap X$ является наименьшим в $X$ относительно $\in_X$.*

В связи с этим стоит отметить:

**Следствие.** *Пусть $X$ — множество ординалов такое, что для любых ординалов $\alpha$ и $\beta$,*

$$\alpha < \beta \quad \text{и} \quad \beta \in X \quad \Longrightarrow \quad \alpha \in X.$$

*Тогда $X$ — ординал.*

Приведём ещё один полезный факт:

**Теорема.** *Пусть $X$ — множество ординалов. Тогда $\bigcup X$ — ординал; при этом $\bigcup X$ является «супремумом» $X$ в классе всех ординалов относительно $<$.*

Заметим, что для каждого ординала $\alpha$ множество

$$\alpha + 1 \ := \ \alpha \cup \{\alpha\}$$

также является ординалом, причём не существует ординала $\beta$ такого, что $\alpha < \beta < \alpha + 1$. Ординал называется *непредельным*, если он имеет вид $\alpha + 1$ для некоторого ординала $\alpha$, и *предельным* в противном случае. Разумеется, каждый предельный ординал совпадает с «супремумом» всех ординалов, которые меньше его.

Ординалы можно восприниматься как канонические представители в.у.м.:

Теорема (о связи ординалов и в.у.м.). *Пусть $\mathfrak{A}$ — в.у.м. Тогда существует единственный ординал $\alpha$ такой, что $\mathfrak{A}$ изоморфно $(\alpha, \in_\alpha)$.*

*Доказательство.* Нетрудно понять, что два ординала равны тогда и только тогда, когда они изоморфны как в.у.м. Отсюда сразу следует единственность.

Докажем существование подходящего $\alpha$. Для этого рассмотрим

$$S \;:=\; \{a \in A \mid \text{найдётся ординал } \alpha_a \text{ такой, что } [0,a)_{\mathfrak{A}} \text{ и } \alpha_a \text{ изоморфны как в.у.м.}\}.$$

Очевидно, если $a \in S$, то соответствующий ординал $\alpha_a$ определяется однозначно. Значит, используя Repl, можно образовать множество

$$X \;:=\; \{\alpha_a \mid a \in S\}.$$

Поскольку изоморфизмы в.у.м. переводят начальные сегменты в начальные сегменты, то $S$ будет начальным сегментом $\mathfrak{A}$, а $X$ — «начальным сегментом» в классе всех ординалов относительно $<$. В частности, $X$ — ординал. Определим $f : S \to X$ по правилу

$$f(a) \;:=\; \alpha_a.$$

Легко проверить, что $f$ строго возрастает. Допустим, что $A \setminus S \neq \varnothing$, и обозначим через $c$ наименьший элемент в $A \setminus S$. Тогда $f$ — изоморфизм между $[0,c)_{\mathfrak{A}}$ и $X$ как в.у.м., откуда $c \in B$, что противоречит выбору $c$. Стало быть, $S = A$. Таким образом, $f$ — изоморфизм из $\mathfrak{A}$ на $(X, \in_X)$, т.е. $\alpha := X$ подходит. □

Будем говорить, что ординал является *кардиналом*, если он не равномощен никакому своему элементу. Для обозначения кардиналов используют $\kappa$, $\lambda$, $\mu$ и их производные.

Теорема. *Для любого $X$ существует единственный кардинал $\operatorname{card}(X)$, равномощный $X$.*

*Доказательство.* В силу теоремы Цермело, найдётся $\leqslant_X \subseteq X \times X$ такое, что $(X, \leqslant_X)$ — в.у.м. Ввиду теоремы выше, $(X, \leqslant_X) \cong (\alpha, \in_\alpha)$ для подходящего ординала $\alpha$. В частности, $X$ равномощно $\alpha$, т.е. существуют ординалы, равномощные $X$. Обозначим

$$\operatorname{card}(X) \;:=\; \bigcap \{\beta \in \alpha + 1 \mid X \text{ равномощно } \beta\}.$$

Таким образом, $\operatorname{card}(X)$ — наименьший из ординалов, равномощных $X$. Нетрудно проверить, что он будет искомым кардиналом. □

Наконец, легко понять, что кардиналы множеств обладают нужными свойствами:

Предложение. *Для любых $X$ и $Y$ верно следующее:*

*i.* $\operatorname{card}(X) = \operatorname{card}(Y)$ *т.т.т., когда $X$ равномощно $Y$;*

*ii.* $\operatorname{card}(X) \leqslant \operatorname{card}(Y)$ *т.т.т., когда $X$ равномощно некоторому подмножеству $Y$.*