. . . .

Аксиомы линейно упорядоченных (не обязательно абелевых) групп — это универсальные замыкания следующих формул:

- $(x + y) + z = x + (y + z)$,
- $x + 0 = 0 + x = x$,
- $x + (-x) = (-x) + x = 0$,
- $x \not< x$,
- $x < y < z \to x < z$,
- $x \neq y \to x < y \vee y < x$,
- $x < y \to x + z < y + z$ и
- $x < y \to z + x < z + y$.

. . . .

. . . .

Аксиомы линейно упорядоченных колец — это аксиомы колец (с единицей) вместе с универсальными замыканиями следующих формул:

- $x \not< x$;
- $x < y \wedge y < z \to x < z$;
- $x \neq y \to x < y \vee y < x$;
- $x < y \to x + z < y + z$ и
- $0 < x \wedge 0 < y \to 0 < x \cdot y$.

. . . .

. . . .

Через PrA обозначается множество, состоящее из универсальных замыканий формул

- $\mathsf{s}(x) \neq 0$,
- $\mathsf{s}(x) = \mathsf{s}(y) \to x = y$,
- $x + 0 = x$,
- $x + \mathsf{s}(y) = \mathsf{s}(x + y)$,
- $x \not< 0$ и
- $x < \mathsf{s}(y) \leftrightarrow (x < y \vee x = y)$,

а также универсальных замыканий всех формул вида

$$\Phi(x/0) \wedge \forall x\, (\Phi(x/x) \to \Phi(x/\mathsf{s}(x))) \to \forall x\, \Phi,$$

которые в совокупности называют *схемой аксиом индукции для* PrA.

. . . .

. . . .

Через PA обозначается множество, состоящее из универсальных замыканий формул

A1. $\mathsf{s}(x) \neq 0$,

A2. $\mathsf{s}(x) = \mathsf{s}(y) \to x = y$,

A3. $x + 0 = x$,

A4. $x + \mathsf{s}(y) = \mathsf{s}(x + y)$,

A5. $x \cdot 0 = 0$,

A6. $x \cdot \mathsf{s}(y) = x \cdot y + x$,

A7. $x \not< 0$ и

A8. $x < \mathsf{s}(y) \leftrightarrow (x < y \vee x = y)$,

а также универсальных замыканий всех формул вида

$$\Phi(x/0) \wedge \forall x (\Phi(x/x) \to \Phi(x/\mathsf{s}(x))) \to \forall x \, \Phi,$$

которые в совокупности называют *схемой аксиом индукции для* PA. Эта теория известна как *арифметика Пеано.*

Кроме того, обозначим через MA множество, состоящее из универсальных замыканий A1–A8, а также формул

A9. $0 < x \vee 0 = x$ и

A10. $\mathsf{s}(x) < y \leftrightarrow (x < y \wedge \mathsf{s}(x) \neq y)$.

Эту теорию мы будем называть *минимальной арифметикой.*

. . . .