1 Выводимость в арифметике Пресбургера

Упражнение 1

Для каждого $n \in \mathbb{N}_+$ выведите в теории линейно упорядоченных групп:

$$x \neq 0 \longrightarrow nx \neq 0.$$

Упражнение 2

Покажите, что в теории линейно упорядоченных групп аксиома

$$\forall x \, \forall y \, \forall z \, (x < y < z \to x < z)$$

выводима из остальных аксиом, если к ним добавить $\forall x \, \forall y \, (x > 0 \land y > 0 \to x + y > 0)$.

Упражнение 3

Выведите в PrA: $(x + y) + z = x + (y + z)$.

Упражнение 4

Выведите в PrA:

i. $0 + x = x$;

ii. $\mathsf{s}(x + y) = \mathsf{s}(x) + y$;

iii. $x + y = y + x$.

Упражнение 5

Выведите в PrA: $0 < x \lor 0 = x$.

Упражнение 6

Выведите в PrA: $x < y \to \mathsf{s}(x) < \mathsf{s}(x)$.

Упражнение 7

Выведите в PrA:

i. $x \not< x$;

ii. $x < y \wedge y < z \to x < z$;

iii. $x \neq y \to x < y \vee y < x$.

Упражнение 8

Выведите в PrA: $x < y \leftrightarrow x + z < y + z$.

Упражнение 9

Выведите в PrA:

i. $x < \mathsf{s}(x)$;

ii. $y \leqslant x \vee \mathsf{s}(x) \leqslant y$.

Упражнение 10

Выведите в PrA: $x = y \leftrightarrow x + z = y + z$.

Упражнение 11

Выведите в PrA: $x < y \leftrightarrow \exists! z\,(z \neq 0 \wedge x + z = y)$.

2 Решётки

Рассмотрим сигнатуру
$$\sigma \ := \ \langle \wedge, \vee; = \rangle.$$
Обозначим за L множество, состоящее из универс. замыканий следующих σ-формул:

- $x \wedge y = y \wedge x$;
- $x \vee y = y \vee x$;
- $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$;
- $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$;
- $x \vee (x \wedge y) = x$; %закон поглощения
- $x \wedge (x \vee y) = x$. %закон поглощения

Под *решётками* понимаются модели L.

Упражнение 1

Выведите в L *законы идемпотентности*:

a. $x \wedge x = x$;

b. $x \vee x = x$.

Введём обозначения:

$$\begin{aligned} x \leqslant y \ &:= \ x \wedge y = x; \\ \mathrm{Inf}\,(x, y, z) \ &:= \ z \leqslant x \wedge z \leqslant y \wedge \forall u\,(u \leqslant x \wedge u \leqslant y \to u \leqslant z); \\ \mathrm{Sup}\,(x, y, z) \ &:= \ x \leqslant z \wedge y \leqslant z \wedge \forall u\,(x \leqslant u \wedge y \leqslant u \to z \leqslant u). \end{aligned}$$

Интуитивно: если $\leqslant$ определяет частичный порядок, то Inf определяет инфимум относительно $\leqslant$, а Sup — супремум.

Упражнение 2

Выведите в L: $x \leqslant y \leftrightarrow x \vee y = y$.

Упражнение 3

Выведите в L:

a. $x \leqslant x$;

b. $x \leqslant y \to (y \leqslant z \to x \leqslant z)$;

c. $x \leqslant y \to (y \leqslant x \to x = y)$.

Упражнение 4

Выведите в L:

a. $x \wedge y = z \leftrightarrow \mathrm{Inf}\,(x, y, z)$;

b. $x \vee y = z \leftrightarrow \mathrm{Sup}\,(x, y, z)$.

Для каждой решётки $\mathfrak{L}$ возьмём

$$\leqslant_{\mathfrak{L}} \;:=\; \left\{(a, b) \in L^2 \mid \mathfrak{L} \Vdash a \leqslant b\right\}$$

и обозначим за $\mathrm{O}\,(\mathfrak{L})$ ч.у.м. $\langle L; \leqslant_{\mathfrak{L}}\rangle$. Мы будем называть ч.у.м. $\langle A; \leqslant_A\rangle$ *решёточным*, если у всякого конечного подмножества A есть инфимум и супремум относительно $\leqslant_A$.[1]

Упражнение 5

i. Для любых решёток $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$,

$$\mathfrak{L}_1 \;=\; \mathfrak{L}_2 \quad\Longleftrightarrow\quad \mathrm{O}\,(\mathfrak{L}_1) \;=\; \mathrm{O}\,(\mathfrak{L}_2).$$

ii. Для каждого решёточного ч.у.м. $\mathfrak{A}$ найдётся решётка $\mathfrak{L}$ такая, что $\mathrm{O}\,(\mathfrak{L}) = \mathfrak{A}$.

Далее, решётка называется:

- *дистрибутивной*, если в ней истинны
  - $\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z))$ и
  - $\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z))$;
- *ограниченной*, если в ней истинны
  - $\exists u\, \forall x\, (u \wedge x = u)$ и %$\exists u\, \forall x\, (u \leqslant x)$
  - $\exists u\, \forall x\, (x \vee u = u)$. %$\exists u\, \forall x\, (x \leqslant u)$

Пусть $\mathfrak{L}$ — ограниченная дистрибутивная решётка. Возьмём

$$0 \;:=\; \inf_{\leqslant_{\mathfrak{L}}} L \quad \text{и} \quad 1 \;:=\; \sup_{\leqslant_{\mathfrak{L}}} L.$$

Под *дополнением* $a \in L$ *в* $\mathfrak{L}$ понимается $b \in L$ такой, что $a \wedge b = 0$ и $a \vee b = 1$. Дополнение может и не существовать, разумеется.

Упражнение 6: единственность дополнений

Пусть $\mathfrak{L}$ — ограниченная дистрибутивная решётка. Тогда для любых $a, b, c \in L$,

$$a \wedge b \;=\; a \wedge c \;=\; 0 \quad \text{и} \quad a \vee b \;=\; a \vee c \;=\; 1 \quad\Longrightarrow\quad b \;=\; c.$$

Здесь и далее мы пишем $\wedge$ и $\vee$ вместо $\wedge^{\mathfrak{L}}$ и $\vee^{\mathfrak{L}}$ во избежание загромождения текста.

[1] Достаточно потребовать, чтобы у всякого $\{a, b\} \subseteq A$ были инфимум и супремум относительно $\leqslant_A$.

Будем говорить, что ч.у.м. $\langle A; \leqslant_A \rangle$ *решёточно полон*, если у всякого подмножества A есть инфимум и супремум относительно $\leqslant_A$.

Упражнение 7

Пусть $\mathfrak{A}$ — решёточно полный ч.у.м., а f — гомоморфизм из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}$. Возьмём

$$F \ := \ \{a \in A \mid f(a) = a\}.$$

Тогда индуцированный ч.у.м. $\mathfrak{F}$ с носителем F также решёточно полон.

Замечание. Соответственно решётку $\mathfrak{L}$ называют *полной*, если у каждого подмножества L есть инфимум и супремум относительно $\leqslant_{\mathfrak{L}}$. Разумеется, упражнение 7 можно переформулировать в терминах решёток. Этот результат играет важную роль в теоретической информатике.

3 Булевы алгебры

Рассмотрим расширенную сигнатуру

$$\sigma' \;:=\; \langle 0, 1; \wedge, \vee, \neg; = \rangle.$$

Обозначим за BA множество, состоящее из элементов L, а также универсальных замыканий следующих σ'-формул:

- $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;
- $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$;
- $0 \wedge x = 0$;
- $x \vee 1 = 1$;
- $x \wedge \neg x = 0$; %аксиома дополнения
- $x \vee \neg x = 1$. %аксиома дополнения

Под *булевыми алгебрами* понимаются модели BA. Значит, σ'-структура $\mathfrak{B}$ является булевой алгеброй тогда и только тогда, когда σ-обеднение $\mathfrak{B}$ — ограниченная дистрибутивная решётка, в которой у каждого элемента есть дополнение, причём:

- $0^{\mathfrak{B}}$ — наименьший элемент, а $1^{\mathfrak{B}}$ — наибольший элемент;
- $\neg^{\mathfrak{B}}$ — функция, сопоставляющая всякому элементу B его дополнение.[2]

Разумеется, так как в теории решёток $x \wedge y = x$ равносильно $x \vee y = y$, аксиомы для наименьшего и наибольшего элементов можно переформулировать следующим образом:

- $0 \vee x = x$;
- $x \wedge 1 = x$.

Они в некотором смысле чуть сильнее, чем исходные аксиомы.

Упражнение 1

Обозначим за $\mathsf{BA}^\star$ множество, состоящее из универс. замыканий следующих σ'-формул:

- законы коммутативности;
- законы дистрибутивности;
- $0 \vee x = x$;
- $x \wedge 1 = x$;
- аксиомы дополнения.

Тогда $[\mathsf{BA}^\star] = [\mathsf{BA}]$, т.е. $\mathsf{BA}^\star$ дедуктивно эквивалентно BA. Таким образом, в $\mathsf{BA}^\star$ выводимы законы ассоциативности и законы поглощения.

[2] Как мы знаем, это дополнение единственно.

Упражнение 2

Выведите в BA: $\neg 0 = 1$ и $\neg 1 = 0$. %здесь $\neg$ - функциональный символ

Упражнение 3

Выведите в BA: $\neg\neg x = x$. %здесь $\neg$ - функциональный символ

Упражнение 4

Выведите в BA *законы де Моргана*:

i. $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$;

ii. $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$.

Введём обозначения

$$x \oplus y \ := \ (x \wedge \neg y) \vee (y \wedge \neg x) \quad \text{и} \quad x \odot y \ := \ x \wedge y.$$

На булевы алгебры можно смотреть как на особого рода кольца:

Упражнение 5

Выведите в BA:

i. $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$;

ii. $x \oplus y = y \oplus x$;

iii. $x \oplus 0 = x$;

iv. $x \oplus x = 0$; %т.е. x играет обратного по $\oplus$

v. $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$;

vi. $x \odot y = y \odot x$;

vii. $x \odot 1 = x$;

viii. $x \odot (y \oplus z) = (x \odot y) \oplus (x \odot z)$;

ix. $x \odot x = x$. %в кольцах это называют идемпотентностью

Упражнение 6

Выведите в BA:

i. $x \wedge y = x \odot y$;

ii. $x \vee y = x \oplus y \oplus (x \odot y)$;

iii. $\neg x = x \oplus 1$.

4 Булевы кольца

Обозначим через BR множество, состоящее из:

- аксиом теории колец (не обязательно коммутативных, но с единицей);
- $\forall x\,(x \cdot x = x)$.

Под *булевыми* — или *идемпотентными* — *кольцами* понимаются модели BR.

Упражнение 1

В BR выводимы:

i. $x + x = 0$;

ii. $x \cdot y = y \cdot x$.

Упражнение 2

Пусть $\mathfrak{A}$ — булево кольцо с $|A| \geqslant 3$. Тогда в $\mathfrak{A}$ есть ненулевые делители нуля.

Упражнение 3

Группу называют *булевой*, если в ней истинно $\forall x\,(x \circ x = e)$, т.е. все её элементы имеют порядок 2. Покажите, что всякая булева группа коммутативна.

Для каждой булевой алгебры $\mathfrak{B}$ обозначим через $\mathrm{R}\,(\mathfrak{B})$ булево кольцо с носителем B, в котором

$$\begin{aligned}
0^{\mathrm{R}(\mathfrak{B})} &:= 0,\\
1^{\mathrm{R}(\mathfrak{B})} &:= 1,\\
+^{\mathrm{R}(\mathfrak{B})} &:= \lambda a.\lambda b.\,[a \oplus b],\\
\cdot^{\mathrm{R}(\mathfrak{B})} &:= \lambda a.\lambda b.\,[a \odot b],\\
-^{\mathrm{R}(\mathfrak{B})} &:= \lambda a.\,[a],
\end{aligned}$$

где 0, 1, $\oplus$ и $\odot$ в правых частях интерпретируются как в $\mathfrak{B}$.

Упражнение 4

i. Для любых булевых алгебр $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$,

$$\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_2 \iff \mathrm{R}\,(\mathfrak{B}_1) = \mathrm{R}\,(\mathfrak{B}_2).$$

ii. Для каждого булева кольца $\mathfrak{A}$ найдётся булева алгебра $\mathfrak{B}$ такая, что $\mathrm{R}\,(\mathfrak{B}) = \mathfrak{A}$.

Более точная формулировка полученного результата такова: BA и BR взаимно интерпретируемы друг в друге (без параметров). Но мы остановимся на достигнутом.

5 Вещественно замкнутые поля

Возьмём в качестве σ сигнатуру упорядоченных колец/полей, т.е.

$$\sigma \ := \ \langle 0, 1; +, -, \cdot; <, = \rangle.$$

Пусть $\mathfrak{R}$ — стандартная σ-структура с носителем $\mathbb{R}$. Далее, обозначим через RCF множество, состоящее из аксиом линейно упорядоченных полей, σ-предложения

$$\forall x \, (0 < x \to \exists u \, x = u \cdot u),$$

а также всех σ-предложений вида

$$\forall \overline{u} \, (u_n \neq 0 \to \exists x \, \mathrm{p}_n \, (x; \overline{u}) = 0),$$

где n нечётно.[3] Модели RCF называют *вещественно замкнутыми полями*.

Упражнение 1

Выведите в теории линейно упорядоченных колец:

$$x \neq 0 \quad \longrightarrow \quad 0 < x \cdot x.$$

В частности, если $0 \neq 1$, то $0 < 1 \cdot 1 = 1$.

Упражнение 2

Выведите в теории линейно упорядоченных полей:

$$x < y \quad \longrightarrow \quad \exists u \, x < u < y.$$

Упражнение 3

Для любого бескванторного σ-предложения Φ:

i. если $\mathfrak{R} \Vdash \Phi$, то в теории линейно упорядоченных полей выводимо Φ;

ii. если $\mathfrak{R} \nVdash \Phi$, то в теории линейно упорядоченных полей выводимо $\neg\Phi$.

На самом деле, здесь даже не нужны обратные по умножению.

Напоминаю, что (неупорядоченное) поле называют *алгебраически замкнутым*, если в нём истинны все формулы вида

$$\forall \overline{u} \, (u_n \neq 0 \to \exists x \, \mathrm{p}_n \, (x; \overline{u}) = 0),$$

где $n \neq 0$. Отметим без доказательства:

[3] Здесь $\mathrm{p}_n \, (x; \overline{u})$ обозначает $\sum_{i=0}^{n} u_i x^i$.

Факт

Для любого линейно упорядоченного поля $\mathfrak{F}$ следующие условия эквивалентны:

i. $\mathfrak{F}$ вещественно замкнуто;

ii. F как поле не является алгебраически замкнутым, но его расширение $F\left[\sqrt{-1}\right]$ алгебраически замкнуто.

Упражнение 4

Для любого линейно упорядоченного поля $\mathfrak{F}$ следующие условия эквивалентны:

i. $\mathfrak{F}$ вещественно замкнуто;

ii. в $\mathfrak{F}$ истинно $\forall x\,(0 < x \to \exists u\, u \cdot u = x)$, а также все σ-предложения вида

$$\forall x\,\forall y\,\forall \overline{u}\,(x < y \wedge \mathrm{p}_n\,(x;\overline{u}) \cdot \mathrm{p}_n\,(y;\overline{u}) < 0 \to \exists z\,(x < z < y \wedge \mathrm{p}_n\,(z;\overline{u}) = 0)),$$

которые представляют собой *полиномиальную версию теоремы о среднем значении*.

Отсюда получается альтернативная аксиоматизация класса всех вещественно замкнутых полей. Нетрудно убедиться, что дедуктивное замыкание каждой из эти аксиоматизаций совпадает с $\mathrm{Th}\,(\mathfrak{R})$, в силу элиминации кванторов.

6 Выводимость в арифметике Пеано %см. также PrA

Упражнение 1

Выведите в PA:

i. $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$;

ii. $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.

Упражнение 2

Выведите в PA: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

Упражнение 3

Выведите в PA:

i. $0 \cdot x = 0$;

ii. $x \cdot y + y = \mathsf{s}(x) \cdot y$;

iii. $x \cdot y = y \cdot x$.

Упражнение 4

Выведите в PA: $z \neq 0 \to (x < y \leftrightarrow x \cdot z < y \cdot z)$.

Упражнение 5: вспомогательное

Выведите в PA: $y \neq 0 \to x \leqslant x \cdot y$.

Упражнение 6

Под *принципом возвратной индукции* понимается совокупность всех формул вида

$$\forall x \, ((\forall u < x) \, \Phi(x/u) \to \Phi(x/x)) \to \forall x \, \Phi.$$[4]

Покажите, что все такие формулы выводимы в PA.

[4] Для удобства мы будем нередко писать $\Phi(t)$ вместо $\Phi(x/t)$ (хотя с формальной точки зрения это не вполне корректно).

Упражнение 7

Под *принципом минимального элемента* понимается совокупность всех формул вида:

$$\exists x\, \Phi\,(x/x) \to \exists x\, (\Phi\,(x/x) \wedge \neg(\exists u < x)\, \Phi\,(x/u)).$$

Покажите, что все такие формулы выводимы в PA.

Упражнение 8

Пусть Γ состоит из универсальных замыканий следующих формул:

- $x < \mathsf{s}\,(x)$;
- $x \neq 0 \to \exists y\, x = \mathsf{s}\,(y)$; %это легко выводится в PrA
- всех формул из принципа минимального элемента.

Покажите, что схему аксиом (обычной) индукции можно вывести в Γ.

Упражнение 9

Выведите в PA: $\forall x\, \forall y\, (y \neq 0 \to (\exists! u)\, (\exists! v < y)\, x = y \cdot u + v)$.

Введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned} x \mid y \quad &:= \quad \exists u\, x \cdot u = y; \\ \mathrm{Irred}\,(x) \quad &:= \quad x \neq 0 \wedge x \neq \underline{1} \wedge \forall u\, (u \mid x \to u = \underline{1} \vee u = x); \\ \mathrm{Prime}\,(x) \quad &:= \quad x \neq 0 \wedge x \neq \underline{1} \wedge \forall u\, \forall v\, (x \mid u \cdot v \to x \mid u \vee x \mid v). \end{aligned}$$

Здесь используется кольцевая терминология (от англ. «irreducible» и «prime»).

Упражнение 10

Выведите в PA: $\mathrm{Irred}\,(x) \leftrightarrow \mathrm{Prime}\,(x)$.

Упражнение 11

Выведите в PA: $x \neq \underline{1} \to \exists u\, (\mathrm{Prime}\,(u) \wedge u \mid x)$.

Наконец, можно доказать, что множество всех простых чисел бесконечно:

Упражнение 12

Выведите в PA: $\forall x\, \exists y\, (\mathrm{Prime}\,(y) \wedge x < y)$.

Можно продолжить развивать элементарную теорию чисел в PA (ввести н.о.д., н.о.к., вывести соотношение Безу для натуральных чисел и так далее и тому подобное). Делать мы этого, однако, не будем.

7 Σ_1-определимость

Пусть $R \subseteq \mathbb{N}^\ell$. Возьмём

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathsf{A}}^{R} \;&:=\; \sigma_{\mathsf{A}} \cup \{\underline{R}\} \\ &=\; \langle 0; \mathsf{s}, +, \cdot; <, =, \underline{R}\rangle,\end{aligned}$$

где $\underline{R}$ — новый ℓ-местный предикатный символ. Обозначим стандартную σ_{A}^{R}-структуру с носителем $\mathbb{N}$ через $\mathfrak{N}^R$ (здесь $\underline{R}$ интерпретируется как R). Разумеется, можно говорить о Δ_0- и Σ_1-определимости в $\mathfrak{N}^R$. Аналогично для $f : \mathbb{N}^\ell \to \mathbb{N}$.

Упражнение 1

Пусть $R \subseteq \mathbb{N}^\ell$ является Δ_0-определимым в $\mathfrak{N}$. Тогда, если множество Δ_0-определимо в $\mathfrak{N}^R$, то оно Δ_0-определимо в $\mathfrak{N}$.

Упражнение 2

Пусть $f : \mathbb{N}^\ell \to \mathbb{N}$ такова, что:

- график f является Δ_0-определимым в $\mathfrak{N}$;
- $\mathfrak{N}^f \Vdash \widetilde{\forall}\, \underline{f}\,(u_1, \ldots, u_\ell) \leqslant t$ для некоторого σ_{A}-терма t.[5]

Тогда, если множество Δ_0-определимо в $\mathfrak{N}^f$, то оно Δ_0-определимо в $\mathfrak{N}$.

Вспомним, что *функцией Гёделя* называют $\gamma : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, действующую по правилу

$$\gamma\,(n, i) \;:=\; \mathrm{rest}\,(\mathrm{left}\,(n), 1 + (i+1)\,\mathrm{right}\,(n)).$$

С помощью китайской теоремы об остатках нетрудно получить следующее.

Упражнение 3

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ и любого $(b_0, \ldots, b_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$ существует $a \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\gamma\,(a, 0) \;=\; b_0, \quad \ldots, \quad \gamma\,(a, n) \;=\; b_n.$$

Упражнение 4

Пусть $R \subseteq \mathbb{N}^\ell$ является Δ_1-определимым в $\mathfrak{N}$. Тогда, если множество Δ_1-определимо в $\mathfrak{N}^R$, то оно Δ_1-определимо в $\mathfrak{N}$.

---

[5] Можно считать, что все переменные, входящие в t, содержатся среди $u_1, \ldots, u_\ell$.

Упражнение 5

Пусть $f : \mathbb{N}^\ell \to \mathbb{N}$ такова, что её график является Δ_1-определимым в $\mathfrak{N}$. Тогда, если множество Δ_1-определимо в $\mathfrak{N}^f$, то оно Δ_1-определимо в $\mathfrak{N}$.

Вспомним, что $A \subseteq \mathbb{N}^\ell$ называется *диофантовым*, если оно определимо в $\mathfrak{N}$ некоторой σ_{A}-формулой вида $\exists \vec{y}\, t_1 = t_2$, где t_1 и t_2 суть термы.[6]

Упражнение 6

Пусть $A, B \subseteq \mathbb{N}^\ell$ диофантовы. Тогда $A \cup B$ и $A \cap B$ диофантовы.

Замечание. Вместе с тем дополнение диофантового множества не обязано быть диофантовым, в силу теоремы М.–Р.–Д.–П.

Упражнение 7

Покажите, что следующие условия задают диофантовы множества:

a. x не является степенью двойки;

b. x не является простым;

c. x меньше или равно y;

d. x не равно y

e. x делит y;

f. x и y взаимно просты.

Упражнение 8

Каждое диофантовое множество может быть определено в $\mathfrak{N}$ некоторой σ_{A}-формулой вида $\exists \vec{y}\, t_1 = t_2$, где t_1 и t_2 суть полиномы степени $\leqslant 4$.

На лекциях было введено обозначение

$$\mathsf{DE}\,(\mathfrak{N}) \;:=\; \Big\{ t_1 = t_2 \in \mathrm{At}_{\sigma_{\mathsf{A}}} \mid \mathfrak{N} \Vdash \widetilde{\exists}\, t_1 = t_2 \Big\}.$$

Аналогичным образом задаётся $\mathsf{DE}\,(\mathfrak{Z})$, причём можно даже не менять сигнатуру.

Упражнение 9

$\mathsf{DE}\,(\mathfrak{N}) \equiv \mathsf{DE}\,(\mathfrak{Z})$.

[6]В упражнениях ниже нельзя пользоваться теоремой Матиясевича–Робинсон–Дэвиса–Патнэма.

8 Выводимость в минимальной арифметике

Упражнение 1

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\mathsf{MA} \vdash \underline{n} < x \leftrightarrow x \neq 0 \wedge \ldots \wedge x \neq \underline{n}$.

Упражнение 2

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\mathsf{MA} \vdash \neg \underline{n} < x \leftrightarrow (x < \underline{n} \vee x = \underline{n})$.

Упражнение 3

Для любых $m, n \in \mathbb{N}$:

i. если $m < n$, то $\mathsf{MA} \vdash x < \underline{m} \to x < \underline{n}$;

ii. $\mathsf{MA} \vdash x < y \wedge y < \underline{n} \to x < \underline{n}$.

Упражнение 4

Для любых $m, n \in \mathbb{N}$:

i. если $m < n$, то $\mathsf{MA} \vdash \underline{n} < x \to \underline{m} < x$;

ii. $\mathsf{MA} \vdash \underline{n} < x \wedge x < y \to \underline{n} < y$.

На самом деле, теоремы Гёделя о неполноте можно было бы получить, используя RA. Вместе с тем стоит отметить, что MA и RA не сравнимы по выводимости:

Упражнение 5

i. $[\mathsf{RA}] \not\subseteq [\mathsf{MA}]$ и

ii. $[\mathsf{RA}] \not\supseteq [\mathsf{MA}]$.

При этом MA и RA обе куда слабее, чем PA.

Упражнение 6

Докажите, что ни в MA, ни в RA нельзя вывести:

a. $(x + y) + z = x + (y + z)$;

b. $x + y = y + x$;

c. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$;

d. $x \cdot y = y \cdot x$.

Вместо всей схемы индукции можно брать её части. Например:

Упражнение 7: необязательное

Обозначим через MA^{Σ_1} множество, состоящее из универсальных замыканий `A1`–`A8`, а также универсальных замыканий всех формул вида

$$\Phi\,(x/0) \land \forall x\,(\Phi\,(x/x) \to \Phi\,(x/\mathsf{s}\,(x))) \to \forall x\,\Phi, \quad \text{где } \Phi \in \Sigma_1.$$

Далее, под *схемой ограниченности для* Δ_0 понимается совокупность всех формул вида

$$(\forall x < u)\,\exists y\,\Phi \to \exists v\,(\forall x < u)\,(\exists y < v)\,\Phi, \quad \text{где } \Phi \in \Delta_0.$$

Покажите, что все такие формулы выводимы в MA^{Σ_1}.

9 Вокруг $1^{\text{ой}}$ теоремы Гёделя

Упражнение 1: тривиальное

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}$ непротиворечиво, и $\mathsf{MA} \subseteq [\Gamma]$. Тогда для всех $f : \mathbb{N}^\ell \to \mathbb{N}$ и $\Phi(x_1, \ldots, x_\ell, y) \in \mathrm{Form}$, если Φ представляет f в Γ, то Φ нумерует f — или точнее, её график — в Γ.[7]

Упражнение 2

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}$ непротиворечиво, и $[\Gamma]$ разрешимо. Тогда можно найти полное разрешимое непротиворечивое $\Delta \subseteq \mathrm{Sent}$ такое, что $\Gamma \subseteq \Delta$.

Замечание. По аналогии можно доказать, что если Γ непротиворечиво и $[\Gamma]$ разрешимо, то у Γ есть вычислимая модель (с носителем $\mathbb{N}$).

[7] На самом деле, вместо $\mathsf{MA} \subseteq [\Gamma]$ достаточно потребовать $\{\mathtt{A1}, \mathtt{A2}\} \subseteq [\Gamma]$.

10 Вокруг $2^{\text{ой}}$ теоремы Гёделя

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}$ разрешимо. Мы будем называть Prov_Γ *правильным*, если $\mathsf{MA} \subseteq [\Gamma]$, и для всех $\Phi, \Psi \in \mathrm{Form}$:

L1. если $\Gamma \vdash \Phi$, то $\Gamma \vdash \Box_\Gamma \Phi$;

L2. $\Gamma \vdash \Box_\Gamma (\Phi \to \Psi) \to (\Box_\Gamma \Phi \to \Box_\Gamma \Psi)$;

L3. $\Gamma \vdash \Box_\Gamma \Phi \to \Box_\Gamma \Box_\Gamma \Phi$.

Тут $\Box_\Gamma \Phi$ — сокращение для $\mathrm{Prov}_\Gamma (\ulcorner \Phi \urcorner)$, где $\ulcorner \Phi \urcorner$ обозначает $\underline{\# (\Phi)}$.

Упражнение 1

Пусть Prov_Γ удовлетворяет L2. Тогда для всех $\Phi, \Psi, \Theta \in \mathrm{Form}$,

$$\Gamma \vdash \Box_\Gamma (\Phi \to (\Psi \to \Theta)) \to (\Box_\Gamma \Phi \to (\Box_\Gamma \Psi \to \Box_\Gamma \Theta)).$$

Упражнение 2

Пусть Prov_Γ удовлетворяет L1 и L2. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ и любых $\Phi_0, \ldots, \Phi_n \in \mathrm{Form}$,

$$\Gamma \vdash \Box_\Gamma (\Phi_1 \wedge \ldots \wedge \Phi_n) \leftrightarrow \Box_\Gamma \Phi_1 \wedge \ldots \wedge \Box_\Gamma \Phi_n.$$

Вспомним, что у нас имеется:

Лемма о диагонализации

Для всякой $\Psi (x) \in \mathrm{Form}$ найдётся $\Phi \in \mathrm{Sent}$ такое, что

$$\mathsf{MA} \vdash \Phi \leftrightarrow \Psi (\ulcorner \Phi \urcorner).$$

С помощью неё нетрудно получить следующее.

Упражнение 3

Пусть Prov_Γ — правильный, и $\Gamma \nvdash \Box_\Gamma \bot$. Тогда $\Gamma \nvdash \Phi \to \Box_\Gamma \Phi$ для некоторого $\Phi \in \mathrm{Sent}$.[8]

Упражнение 4: непростое

Пусть Prov_Γ — правильный. Тогда $\Gamma \vdash \Box_\Gamma (\Box_\Gamma \Phi \to \Phi) \to \Box_\Gamma \Phi$ для всех $\Phi \in \mathrm{Sent}$.

[8]На самом деле, тут не нужно L3.