1 Σ_1-определимость

Рассмотрим сигнатуру

$$\sigma_{\mathsf{A}} \;:=\; \langle 0; \mathsf{s}, +, \cdot\,; <, = \rangle.$$

Обозначим за $\mathfrak{N}$ стандартную σ_{A}-структуру с носителем $\mathbb{N}$. Мы будем называть $\mathfrak{N}$ *стандартной моделью арифметики*. В дальнейшем приставка σ_{A}- и нижний индекс $\cdot_{\sigma_{\mathsf{A}}}$ часто будут опускаться.

Для любых $\Psi \in \mathrm{Form}$ и $t \in \mathrm{Term}$ положим

$$(\forall x < t)\, \Psi \;:=\; \forall x\, (x < t \to \Psi) \quad \text{и} \quad (\exists x < t)\, \Psi \;:=\; \exists x\, (x < t \wedge \Psi).$$

Если всякая подформула формулы Φ, начинающаяся с $\forall$ или $\exists$, имеет вид $(\forall x < t)\, \Psi$ или $(\exists x < t)\, \Psi$, где x не входит в t, то Φ называют Δ_0-*формулой* и при этом пишут $\Phi \in \Delta_0$.

Утверждение 1.1

Пусть $\Phi\,(x_1, \ldots, x_\ell) \in \Delta_0$. Тогда $\left\{\vec{n} \in \mathbb{N}^\ell \mid \mathfrak{N} \Vdash \Phi\,[\vec{n}]\right\}$ разрешимо. $\square$

Если формула Φ имеет вид $\exists \vec{y}\, \Psi$, где $\Psi \in \Delta_0$, то Φ называют Σ_1-*формулой* и при этом пишут $\Phi \in \Sigma_1$.

Утверждение 1.2

Пусть $\Phi\,(x_1, \ldots, x_\ell) \in \Sigma_1$. Тогда $\left\{\vec{n} \in \mathbb{N}^\ell \mid \mathfrak{N} \Vdash \Phi\,[\vec{n}]\right\}$ перечислимо. $\square$

Подмножество $\mathbb{N}^\ell$ называется Δ_0-*определимым в* $\mathfrak{N}$, если оно определимо в $\mathfrak{N}$ некоторой Δ_0-формулой; аналогично для Σ_1.

Наша ближайшая цель — доказать, что всякое перечислимое множество Σ_1-определимо в $\mathfrak{N}$. Для начала рассмотрим расширенную сигнатуру

$$\dot{\sigma}_{\mathsf{A}} \;:=\; \langle 0; \mathsf{s}, +, \cdot\,, \mathsf{exp}; <, = \rangle,$$

где exp интуитивно обозначает $\lambda x.[2^x]$.[1] Обозначим через $\dot{\mathfrak{N}}$ стандартную $\dot{\sigma}_{\mathsf{A}}$-структуру с носителем $\mathbb{N}$. Разумеется, мы можем говорить о Δ_0- и Σ_1-определимости в $\dot{\mathfrak{N}}$.

---

[1] В дальнейшем будем часто писать 2^x вместо $\mathsf{exp}\,(x)$.

Лемма 1.3: о Σ_1-определимости в $\dot{\mathfrak{N}}$

Всякое перечислимое множество Σ_1-определимо в $\dot{\mathfrak{N}}$.

Доказательство. Нам понадобится специальная техника кодирования машин Тьюринга и их вычислений посредством натуральных чисел.

Двоичные слова. Рассмотрим $\iota : \{0,1\}^* \to \mathbb{Z}_+$, действующую по правилу

$$\iota\,(b_{n-1}\dots b_0) \;:=\; 2^n + b_{n-1}\cdot 2^{n-1} + \dots + b_1\cdot 2 + b_0.$$

(В частности, ι отображает пустую последовательность в единицу.) Легко убедиться, что ι является биекцией из $\{0,1\}^*$ на $\mathbb{Z}_+$. Если $\iota\,(w) = k$, то мы будем говорить, что двоичное слово w *кодируется* числом k. Разумеется, формула

$$\mathrm{String}\,(x) \;:=\; x \neq 0$$

определяет в $\dot{\mathfrak{N}}$ предикат «быть кодом некоторого двоичного слова». Далее, на элементах $\mathbb{Z}_+$ можно определить естественные аналоги одноместной функции длины и двухместной функции конкатенации:

$$\begin{aligned} |x| = y \;&:=\; \mathrm{String}\,(x) \wedge 2^y \leqslant x \wedge x < 2^{y+1};\\ x * y = z \;&:=\; \mathrm{String}\,(x) \wedge \mathrm{String}\,(y) \wedge (\exists u \leqslant y)\,\big(z = x \times 2^{|y|} + u \wedge u + 2^{|y|} = y\big). \end{aligned}$$

Заметим, что значения $|x|$ и $x * y$ можно ограничить термами.

Слова в конечном алфавите (а также их последовательности). Пусть E — непустой конечный алфавит. Тогда E представимо в виде

$$E \;=\; \{e_0, \dots, e_n\},$$

где $n = |E| - 1$. Зафиксируем $N \in \mathbb{N}$ такое, что $2^N > n + 1$. Мы будем кодировать e_0, …, e_n с помощью *N-байтов*, т.е. двоичных слов длины N. Для этого положим

$$\ulcorner e_i \urcorner \;:=\; \underline{2^N + i} \quad \text{для всех } i \in \{0, \dots, n\}.$$

Теперь числовые аналоги E и множества всех N-байтов можно определить так:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\,(x) \;&:=\; x = \ulcorner e_0 \urcorner \vee \dots \vee x = \ulcorner e_n \urcorner;\\ \mathrm{Byte}\,(x) \;&:=\; \mathrm{String}\,(x) \wedge |x| = \underline{N}. \end{aligned}$$

Далее, под *словом* мы будем понимать конечную последовательность N-байтов, а под *E-словом* — слово в алфавите E. Следующие формулы говорят сами за себя:

$$\mathrm{Word}\,(x) \;:=\; \mathrm{String}\,(x) \wedge (\exists u \leqslant x)\,(Nu = |x|);$$

$$
\begin{aligned}
\|x\| = y \;&:=\; \mathrm{Word}\,(x) \wedge Ny = |x|;\\
x \preccurlyeq_w y \;&:=\; \mathrm{Word}\,(x) \wedge \mathrm{Word}\,(y) \wedge\\
&\qquad (\exists u, v \leqslant y)\,(\mathrm{Word}\,(u) \wedge \mathrm{Word}\,(v) \wedge y = u * x * v);\\
x \in_w y \;&:=\; \mathrm{Byte}\,(x) \wedge x \preccurlyeq y;\\
\mathrm{Word}_E\,(x) \;&:=\; \mathrm{Word}\,(x) \wedge (\forall u \leqslant x)\,(u \in_w x \to \mathrm{E}\,(u)).
\end{aligned}
$$

Здесь стоит отметить, что при данном способе кодирования конкатенация слов совпадает с конкатенацией соответствующих двоичных последовательностей.

Пусть ; — некоторый вспомогательный символ, отличный от e_0, …, e_n. Положим

$$
\ulcorner ; \urcorner \;:=\; \underline{2^N + n + 1}.
$$

Последовательность $(w_0, \ldots, w_m)$, где $m \in \mathbb{N}$ и $\{w_1, \ldots, w_m\} \subseteq E^*$, будет отождествляться с $w_1; w_2; \ldots; w_m$. Кодом пустой последовательности E-слов мы будем считать 0. Это приводит нас к следующим формулам:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Seq}_E\,(x) \;&:=\; (\mathrm{Word}\,(x) \wedge \forall y \leqslant x\,(y \in_w x \to \mathrm{E}\,(y) \vee y = \ulcorner ; \urcorner)) \vee x = 0;\\
x; y = z \;&:=\; (x = 0 \wedge z = y) \vee (y = 0 \wedge z = x) \vee\\
&\qquad (x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge z = x * \ulcorner ; \urcorner * y);\\
x \preccurlyeq_s y \;&:=\; \mathrm{Seq}_E\,(x) \wedge \mathrm{Seq}_E\,(y) \wedge\\
&\qquad \exists u, v \leqslant y\,(\mathrm{Seq}_E\,(u) \wedge \mathrm{Seq}_E\,(v) \wedge y = u; x; v);\\
x \in_s y \;&:=\; \mathrm{Word}_E\,(x) \wedge x \preccurlyeq_s y.
\end{aligned}
$$

Заметим, что значение $x; y$ можно ограничить термом.

Машины Тьюринга и их вычисления. Рассмотрим произвольную машину Тьюринга $M = \langle Q, A, P, q_0, q_1 \rangle$. Возьмём

$$
E \;:=\; Q \cup A \cup \{\mathtt{S}, \mathtt{L}, \mathtt{R}\}
$$

и зафиксируем $N \in \mathbb{N}$ такое, что $2^N > |E|$. Определим

$$
\mathrm{Q}\,(x) \;:=\; \bigvee_{q \in Q} x = \ulcorner q \urcorner \quad \text{и} \quad \mathrm{A}\,(x) \;:=\; \bigvee_{a \in A} x = \ulcorner a \urcorner.
$$

С помощью $\mathrm{Q}\,(x)$ и $\mathrm{A}\,(x)$ можно естественным образом построить $\mathrm{Word}_Q\,(x)$ и $\mathrm{Word}_A\,(x)$. Далее, всякая команда из P имеет вид

$$
qa \;\to\; q'a'\delta,
$$

где $\{q, q'\} \subseteq Q$, $\{a, a'\} \subseteq A$ и $\delta \in \{\mathtt{S}, \mathtt{L}, \mathtt{R}\}$, а значит, ей можно сопоставить

$$
\ulcorner q \urcorner * \ulcorner a \urcorner * \ulcorner q' \urcorner * \ulcorner a' \urcorner * \ulcorner \delta \urcorner.
$$

Тогда P (точнее, отвечающее P множество кодов) определяется посредством

$$\mathrm{P}\,(x) \ := \bigvee_{qa \to q'a'\delta \in P} x = \ulcorner q \urcorner * \ulcorner a \urcorner * \ulcorner q' \urcorner * \ulcorner a' \urcorner * \ulcorner \delta \urcorner.$$

Напомним, что кофигурации машины M имеют вид uqv, где $q \in Q$ и $\{u, v\} \subseteq A^*$, причём v непусто. Стало быть, множество всех конфигураций определяется посредством

$$\mathrm{Config}_M\,(x) \ := \ (\exists u, q, v \leqslant x)\,(x = u * q * v \wedge \mathrm{Word}_A\,(u) \wedge Q\,(q) \wedge \mathrm{Word}_A\,(v) \wedge v \neq 1).$$

Далее, можно определить отношения «x является начальной конфигурацией на входе y» и «x является заключительной конфигурацией»:

$$\mathrm{Init}_M\,(x, y) \ := \ \mathrm{Config}_M\,(x) \wedge x = \ulcorner q_1 \urcorner * \ulcorner 0 \urcorner * y;$$

$$\mathrm{Final}_M\,(x) \ := \ \mathrm{Config}_M\,(x) \wedge \ulcorner q_0 \urcorner \in_w x.$$

Теперь выпишем формулу, которая определяет отношение «машина M за один шаг работы переходит из конфигурации x в конфигурацию y»:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Step}_M\,(x, y) \ := \\
&\quad \mathrm{Config}_M\,(x) \wedge \mathrm{Config}_M\,(y) \wedge (\exists u, v, q, q', a, a', b \leqslant x + y) \\
&\qquad (\mathrm{Word}_A\,(u) \wedge \mathrm{Word}_A\,(v) \wedge \mathrm{Q}\,(q) \wedge \mathrm{Q}\,(q') \wedge \mathrm{A}\,(a) \wedge \mathrm{A}\,(a') \wedge \mathrm{A}\,(b) \wedge \\
&\qquad\quad (\\
&\qquad\quad\; (\mathrm{P}\,(q * a * q' * a' * \ulcorner \mathtt{S} \urcorner) \wedge x = u * q * a * v \wedge y = u * q' * a' * v) \vee \\
&\qquad\quad\; (\mathrm{P}\,(q * a * q' * a' * \ulcorner \mathtt{L} \urcorner) \wedge x = u * b * p * a * v \wedge y = u * q' * b * a' * v) \vee \\
&\qquad\quad\; (\mathrm{P}\,(q * a * q' * a' * \ulcorner \mathtt{L} \urcorner) \wedge x = q * a * v \wedge y = q * \ulcorner 0 \urcorner * a' * v) \vee \\
&\qquad\quad\; (\mathrm{P}\,(q * a * q' * a' * \ulcorner \mathtt{R} \urcorner) \wedge x = u * q * a * b * v \wedge y = u * a' * q' * b * v) \vee \\
&\qquad\quad\; (\mathrm{P}\,(q * a * q' * a' * \ulcorner \mathtt{R} \urcorner) \wedge x = u * q * a \wedge y = u * a' * q' * \ulcorner 0 \urcorner) \\
&\qquad\quad) \\
&\qquad).
\end{aligned}$$

Наконец, отношение «x является протоколом вычисления машины M на входе y» можно определить посредством

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Comp}_M\,(x, y) \ := \\
&\quad \mathrm{Seq}_E\,(x) \wedge (\forall u \leqslant x)\,(u \in_s x \to \mathrm{Config}_M\,(u)) \wedge \\
&\quad (\exists u, v, w \leqslant x)\,(x = u; v; w \wedge \mathrm{Init}_M\,(u, y) \wedge \mathrm{Final}_M\,(w)) \wedge \\
&\quad (\forall u, v, v', w \leqslant x)\,(x = u; v; v'; w \wedge \mathrm{Config}_M\,(v) \wedge \mathrm{Config}_M\,(v') \to \mathrm{Step}_M\,(v, v')).
\end{aligned}$$

Стоит отметить, что здесь речь идёт о полных вычислениях, которые приводят к заключительным конфигурациям.

При вычислении частичных ℓ-местных числовых функций на машинах Тьюринга мы отождествляем каждое $(n_1, \ldots, n_\ell) \in \mathbb{N}^\ell$ со словом

$$1^{n_1}0\ldots01^{n_\ell} \;:=\; \underbrace{1\ldots1}_{n_1 \text{ штук}}\,0\ldots0\,\underbrace{1\ldots1}_{n_\ell \text{ штук}}.$$

В частности, $n \in \mathbb{N}$ превращается в 1^n. Соответствующая функция представляется так:

$$\mathrm{code}\,(x) = y \;:=\; \mathrm{Word}\,(y) \wedge \|y\| = x \wedge (\forall u \leqslant y)\,(u \in_w y \to u = \ulcorner 1 \urcorner).$$

(Покажите, что значение $\mathrm{code}\,(x)$ можно ограничить сверху термом от x.)

То, что машина M на входе $(x_1, \ldots, x_\ell)$ останавливается, выражается посредством

$$\mathrm{T}_M\,(x_1, \ldots, x_\ell) \;:=\; \exists x\,\mathrm{Comp}_M\,(x, \mathrm{code}\,(x_1) * \ulcorner 0 \urcorner * \ldots * \ulcorner 0 \urcorner * \mathrm{code}\,(x_\ell)).$$

Значит, для любого $(n_1, \ldots, n_\ell) \in \mathbb{N}^\ell$,

$$\dot{\mathfrak{N}} \Vdash \mathrm{T}_M\,[n_1, \ldots, n_\ell] \quad\Longleftrightarrow\quad M \text{ на входе } 1^{n_1}0\ldots01^{n_\ell} \text{ останавливается.}$$

Отметим, что полученная Σ_1-формула $\mathrm{T}_M\,(x_1, \ldots, x_\ell)$ содержит ровно один неограниченный квантор существования.

Пусть $A \subseteq \mathbb{N}^\ell$ перечислимо. Значит, χ_A^* вычислима, а потому её можно вычислить на некоторой машине Тьюринга M. Тогда T_M определяет A в $\dot{\mathfrak{N}}$. $\square$

Теперь нужно избавиться от exp.

Как избавиться от экспоненты

Определим $\mathrm{rest} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ по правилу

$$\mathrm{rest}\,(n, m) \;:=\; \begin{cases} n - \lfloor n/m \rfloor \cdot m & \text{если } m \neq 0 \\ n & \text{иначе.} \end{cases}$$

Вспомним один полезный результат из элементарной теории чисел:

Китайская теорема об остатках, вариация

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $(c_0, \ldots, c_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$ и $(b_0, \ldots, b_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$ таковы, что:

- $c_0, \ldots, c_n$ попарно взаимно просты;
- $b_i < c_i$ для всех $i \in \{0, \ldots, n\}$.[2]

Тогда найдётся $a \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\mathrm{rest}\,(a, c_0) \;=\; b_0, \quad \ldots, \quad \mathrm{rest}\,(a, c_n) \;=\; b_n.$$

Рассмотрим $\gamma : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, действующую по правилу

$$\gamma\,(n, i) \;:=\; \mathrm{rest}\,(\mathrm{left}\,(n), 1 + (i+1)\,\mathrm{right}\,(n)).$$

Её порой называют *функцией Гёделя*. С помощью китайской теоремы об остатках можно получить следующее.

Упражнение 1

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ и любого $(b_0, \ldots, b_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$ существует $a \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\gamma\,(a, 0) \;=\; b_0, \quad \ldots, \quad \gamma\,(a, n) \;=\; b_n.$$

Подмножество $\mathbb{N}^\ell$ называют *Δ_1-определимым в* $\mathfrak{N}$, если оно и его дополнение определимы в $\mathfrak{N}$ некоторыми Σ_1-формулами. Аналогично для $\dot{\mathfrak{N}}$.

Утверждение 1.4

График $\lambda x.[2^x]$ является Δ_1-определимым в $\mathfrak{N}$.

Доказательство. Заметим, что график γ является Δ_0-определимым в $\mathfrak{N}$, причём $\gamma\,(x, y)$ можно ограничить σ_{A}-термом. Возьмём

$$A \;:=\; \{(n, 2^n) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

[2] В частности, $c_0, \ldots, c_n$ должны быть отличны от нуля.

Тогда A можно определить в $\mathfrak{N}$ посредством Σ_1-формулы

$$\Phi_A(x,y) \;:=\; \exists u\,(\gamma(u,0)=1 \wedge (\forall v<x)\,\gamma(u,\mathsf{s}(v))=\gamma(u,v)\cdot\underline{2} \wedge \gamma(u,x)=y),$$

а его дополнение — посредством формулы

$$\Phi_{\overline{A}}(x,y) \;:=\; \neg\forall u\,(\gamma(u,0)=1 \wedge (\forall v<x)\,\gamma(u,\mathsf{s}(v))=\gamma(u,v)\cdot\underline{2} \to \gamma(u,x)=y),$$

которая, очевидно, эквивалентна Σ_1-формуле.[3] □

Замечание. Аналогично доказывается Δ_1-определимость графика $\lambda x.\lambda y.[x^y]$ в $\mathfrak{N}$.

Используя предложение 1.4, можно получить следующее.

Упражнение 2

Если множество Σ_1-определимо в $\dot{\mathfrak{N}}$, то оно Σ_1-определимо в $\mathfrak{N}$.

Стало быть, имеет место:

Теорема 1.5: о Σ_1-определимости

Всякое перечислимое множество Σ_1-определимо в $\mathfrak{N}$. □

Замечание. Вместе с тем отнюдь не всякое разрешимое (или даже «примитивно разрешимое») множество будет Δ_0-определимо в $\mathfrak{N}$.

Следствие 1.6

Множество перечислимо тогда и только тогда, когда оно Σ_1-определимо в $\mathfrak{N}$. □

[3] Разумеется, все вхождения γ в Φ_A и $\Phi_{\overline{A}}$ должны быть предварительно элиминированы.

В качестве простого приложения теоремы о Σ_1-определимости выступает:

Следствие 1.7

$\mathrm{Th}\,(\mathfrak{N})$ неразрешима.

Доказательство. Зафиксируем $A \subseteq \mathbb{N}$, которое перечислимо, но не разрешимо. Мы уже знаем, что A определимо в $\mathfrak{N}$ некоторой Σ_1-формулой $\Phi\,(x)$. Значит, для любого $n \in \mathbb{N}$,

$$n \ \in \ A \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{N} \Vdash \Phi\,(x/\underline{n}) \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi\,(x/\underline{n}) \ \in \ \mathrm{Th}\,(\mathfrak{N}).$$

Стало быть, A сводится к $\mathrm{Th}\,(\mathfrak{N})$, а потому $\mathrm{Th}\,(\mathfrak{N})$ неразрешима. □

Замечание. Из приведённого только что доказательства легко видеть, что $\mathbb{N} \setminus A$ тоже сводится к $\mathrm{Th}\,(\mathfrak{N})$. Стало быть, $\mathrm{Th}\,(\mathfrak{N})$ даже не перечислимо.

На самом деле, привлекая базовые знания об арифметической иерерхии, можно получить намного больше:

Упражнение 3

i. Подмножество $\mathbb{N}^\ell$ определимо в $\mathfrak{N}$, если и только если оно лежит в некотором уровне арифметической иерархии.

ii. $\mathrm{Th}\,(\mathfrak{N})$ неопределимо в $\mathfrak{N}$.[a]

[a] Пункт (ii) ещё известен как *теорема Тарского о неопределимости истины (в арифметике)*.

Кроме того, мы без труда получаем следующий результат.

1$^{\text{ая}}$ теорема Гёделя о неполноте: версия α

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}$ перечислимо и $\mathfrak{N} \Vdash \Gamma$. Тогда Γ неполно.

Доказательство. Очевидно, $\Gamma \subseteq \mathrm{Th}\,(\mathfrak{N})$. Рассуждая от противного, предположим, что Γ полно. Тогда Γ совпадёт с $\mathrm{Th}\,(\mathfrak{N})$, как легко убедиться, причём Γ окажется разрешимым — это противоречит следствию 1.7. □

О диофантовых множествах

$A \subseteq \mathbb{N}^{\ell}$ называют *диофантовым*, если существуют полиномы

$$p\,(x_1, \ldots, x_\ell, \vec{y}) \quad \text{и} \quad q\,(x_1, \ldots, x_\ell, \vec{y})$$

с коэффициентами из $\mathbb{N}$ такие, что

$$A \;=\; \left\{ (n_1, \ldots, n_\ell) \in \mathbb{N}^{\ell} \mid \begin{array}{c} p\,(n_1, \ldots, n_\ell, \vec{y}) = q\,(n_1, \ldots, n_\ell, \vec{y}) \\ \text{для некоторых } \vec{y} \text{ из } \mathbb{N}. \end{array} \right\}.$$

Как легко убедиться, A диофантово тогда и только тогда, когда оно определимо в $\mathfrak{N}$ посредством σ_{A}-формулы вида $\exists \vec{y}\, t_1 = t_2$, где t_1 и t_2 суть термы.

На самом деле, теорему о Σ_1-определимости можно значительно усилить:

Теорема Матиясевича–Робинсон–Дэвиса–Патнэма; без доказательства

Множество перечислимо тогда и только тогда, когда оно диофантово.

Для удобства введём обозначение

$$\mathsf{DE}\,(\mathfrak{N}) \;:=\; \left\{ t_1 = t_2 \in \mathrm{At}_{\sigma_{\mathsf{A}}} \mid \mathfrak{N} \Vdash \widetilde{\exists}\, t_1 = t_2 \right\}.$$

Под *диофантовой проблемой над* $\mathbb{N}$ понимается проблема принадлежности к $\mathsf{DE}\,(\mathfrak{N})$. Как легко видеть, $\mathsf{DE}\,(\mathfrak{N})$ перечислимо.

Следствие 1.8

$\mathsf{DE}\,(\mathfrak{N})$ неразрешимо.

Доказательство. Зафиксируем $A \subseteq \mathbb{N}$, которое перечислимо, но не разрешимо. Теорема выше гарантирует, что A определимо в $\mathfrak{N}$ некоторой σ_{A}-формулой вида $\exists \vec{y}\, \Psi$, где $\Psi \in \mathrm{At}$, причём $<$ не входит в Ψ. Значит, для любого $n \in \mathbb{N}$,

$$n \;\in\; A \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{N} \Vdash \exists \vec{y}\, \Psi\,(x/\underline{n}) \quad \Longleftrightarrow \quad \Psi\,(x/\underline{n}) \;\in\; \mathsf{DE}\,(\mathfrak{N}).$$

Стало быть, A сводится к $\mathsf{DE}\,(\mathfrak{N})$, а потому $\mathsf{DE}\,(\mathfrak{N})$ неразрешимо. $\square$

Замечание. По аналогии с $\mathsf{DE}\,(\mathfrak{N})$ можно определить $\mathsf{DE}\,(\mathfrak{Z})$ и $\mathsf{DE}\,(\mathfrak{Q})$. Разумеется, они оба окажутся перечислимы. Более того, нетрудно убедиться, что

$$\mathsf{DE}\,(\mathfrak{Z}) \;\equiv\; \mathsf{DE}\,(\mathfrak{N}).$$

а потому $\mathsf{DE}\,(\mathfrak{Z})$ неразрешимо. *Открытым остаётся вопрос о (не)разрешимости* $\mathsf{DE}\,(\mathfrak{Q})$.

2 Об истинных Δ_0-предложениях

Обозначим через PA множество, состоящее из универсальных замыканий σ-формул

A1. $\mathsf{s}(x) \neq 0$,

A2. $\mathsf{s}(x) = \mathsf{s}(y) \to x = y$,

A3. $x + 0 = x$,

A4. $x + \mathsf{s}(y) = \mathsf{s}(x + y)$,

A5. $x \cdot 0 = 0$,

A6. $x \cdot \mathsf{s}(y) = x \cdot y + x$,

A7. $x \not< 0$ и

A8. $x < \mathsf{s}(y) \leftrightarrow (x < y \vee x = y)$,

а также универсальных замыканий всех σ-формул вида

$$\Phi(x/0) \wedge \forall x\, (\Phi(x/x) \to \Phi(x/\mathsf{s}(x))) \to \forall x\, \Phi,$$

которые в совокупности называются *схемой аксиом индукции в* σ_{A}. В литературе теория PA известна как *арифметика Пеано.*

Кроме того, обозначим через MA множество, состоящее из универсальных замыканий A1–A8, а также σ_{A}-формул

A9. $0 < x \vee 0 = x$ и

A10. $\mathsf{s}(x) < y \leftrightarrow (x < y \wedge \mathsf{s}(x) \neq y)$.

Теорию MA мы будем называть *минимальной арифметикой.*

Утверждение 2.1

$\texttt{A9}$ и $\texttt{A10}$ выводимы в PA, т.е. $[\mathsf{MA}] \subseteq [\mathsf{PA}]$.

Доказательство. Будем рассуждать внутри PA.

$\boxed{\texttt{A9}}$ Покажем по индукции, что

$$\forall x\,(0 < x \vee 0 = x).$$

<u>База:</u> Очевидно, $0 = 0$.

<u>Шаг индукции:</u> Пусть $0 < x \vee 0 = x$. Тогда $0 < \mathsf{s}(x)$ ввиду $\texttt{A8}$.

$\boxed{\texttt{A10}}$ Заметим, что, как легко доказать по индукции:

- $\forall x\,\forall y\,(x < y \leftrightarrow \mathsf{s}(x) < \mathsf{s}(y))$;
- $\forall x\,(x \not< x)$.

Вооружившись этим знанием, покажем по индукции, что

$$\forall y\,\forall x\,(\mathsf{s}(x) < y \leftrightarrow (x < y \wedge \mathsf{s}(x) \neq y)).$$

<u>База:</u> Очевидно, $\mathsf{s}(x) \not< 0$ и $x \not< 0$ ввиду $\texttt{A7}$.

<u>Шаг индукции:</u> Пусть $\mathsf{s}(x) < y$ равносильно $x < y \wedge \mathsf{s}(x) \neq y$. Тогда

$$\begin{aligned}
\mathsf{s}(x) < \mathsf{s}(y) \quad &\leftrightarrow \quad x < y \\
&\leftrightarrow \quad x < y \wedge x \neq y \\
&\leftrightarrow \quad (x < y \wedge x \neq y) \vee (x = y \wedge x \neq y) \\
&\leftrightarrow \quad (x < y \vee x = y) \wedge x \neq y \\
&\leftrightarrow \quad x < \mathsf{s}(y) \wedge x \neq y \\
&\leftrightarrow \quad x < \mathsf{s}(y) \wedge \mathsf{s}(x) \neq \mathsf{s}(y).
\end{aligned}$$

□

Замечание. Вместо MA нередко рассматривают теорию RA, которая задаётся универсальными замыканиями $\mathtt{A1}$–$\mathtt{A6}$, а также σ_{A}-формул

$\mathtt{AR1}$. $x \neq 0 \to \exists y\, x = \mathsf{s}\,(y)$;

$\mathtt{AR2}$. $x < y \leftrightarrow \exists u\, \mathsf{s}\,(u) + x = y$.

Её называют *арифметикой Робинсона*. Как легко убедиться, $\mathtt{AR1}$ и $\mathtt{AR2}$ выводимы в PA, т.е. $[\mathsf{RA}] \subseteq [\mathsf{PA}]$. Вместе с тем известно, что

$$[\mathsf{RA}] \ \not\subseteq \ [\mathsf{MA}] \quad \text{и} \quad [\mathsf{MA}] \ \not\subseteq \ [\mathsf{RA}].$$

Это нетрудно доказать посредством построения модели MA (соответственно RA), которая не является моделью RA (MA). Так или иначе, MA и RA обе куда слабее PA. Например, в них нельзя вывести:

- ассоциативность сложения или умножения;
- коммутативность сложения или умножения.

Напротив, в PA можно вывести практически любую из теорем, встречающихся в обычном курсе элементарной теории чисел.

Несмотря на то, что MA намного слабее PA, она успешно справляется с проверкой истинности и ложности Δ_0-предложений:

Теорема 2.2: о $\boldsymbol{\Delta_0}$-полноте MA

Для любого Δ_0-предложения Φ:

i. если $\mathfrak{N} \Vdash \Phi$, то $\mathsf{MA} \vdash \Phi$;

ii. если $\mathfrak{N} \nVdash \Phi$, то $\mathsf{MA} \vdash \neg\Phi$.

Доказательство. Напоминаю, что под *нумералами* понимаются замкнутые термы

$$\underline{0} \; := \; 0, \quad \underline{1} \; := \; \mathsf{s}(0), \quad \underline{2} \; := \; \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), \quad \ldots$$

Нам понадобится несколько несложных лемм.

Лемма 2.3

Для любых $m, n \in \mathbb{N}$:

i. $\mathsf{MA} \vdash \underline{m} + \underline{n} = \underline{m+n}$;

ii. $\mathsf{MA} \vdash \underline{m} \cdot \underline{n} = \underline{m \cdot n}$.

Доказательство. Простая «внешняя» индукция по n. □

Это наблюдение можно обобщить следующим образом.

Лемма 2.4

Пусть $t \in \mathrm{Term}^\circ$. Тогда $\mathsf{MA} \vdash t = \underline{t^{\mathfrak{N}}}$.

Доказательство. Простая «внешняя» индукция по построению t. □

Кроме того, MA умеет опровергать ложные равенства между нумералами:

Лемма 2.5

Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, причём $m \neq n$. Тогда $\mathsf{MA} \vdash \neg\underline{m} = \underline{n}$.

Доказательство. Простая «внешняя» индукция по n. □

Отсюда уже без труда получается:

Лемма 2.6

Для любых $t_1, t_2 \in \mathrm{Term}^\circ$:

i. если $\mathfrak{N} \Vdash t_1 = t_2$, то $\mathsf{MA} \vdash t_1 = t_2$;

ii. если $\mathfrak{N} \nVdash t_1 = t_2$, то $\mathsf{MA} \vdash \neg t_1 = t_2$.

Доказательство. Прямое следствие предыдущих двух лемм. □

Вместе с тем ограниченные кванторы и вообще вхождения $<$ можно элиминировать с помощью следующего утверждения.

Лемма 2.7

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\mathsf{MA} \vdash x < \underline{n} \leftrightarrow x = 0 \vee \ldots \vee x = \underline{n-1}$.[a]

[a]При этом мы отождествляем пустую дизъюнкцию с $0 \neq 0$, например.

Доказательство. Простая «внешняя» индукция по n. □

Теперь рассмотрим произвольное Δ_0-предложение Φ. Используя леммы выше, можно построить по Φ бескванторное предложение Φ', не содержащее вхождений $<$ и такое, что $\mathsf{MA} \vdash \Phi \leftrightarrow \Phi'$. Осталось показать, что:

i. если $\mathfrak{N} \Vdash \Phi'$, то $\mathsf{MA} \vdash \Phi'$;

ii. если $\mathfrak{N} \nVdash \Phi'$, то $\mathsf{MA} \vdash \neg\Phi'$.

Это делается простой индукцией по построению Φ'. □

Следствие 2.8

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}$ и $\mathsf{MA} \subseteq [\Gamma]$. Тогда для любого Σ_1-предложения Φ,

$$\mathfrak{N} \Vdash \Phi \quad\Longrightarrow\quad \Gamma \vdash \Phi$$

Доказательство. Пусть Φ имеет вид $\exists x_1 \ldots \exists x_\ell \, \Psi\left(x_1, \ldots, x_\ell\right)$, где $\Psi \in \Delta_0$, и $\mathfrak{N} \Vdash \Phi$. Значит, найдутся $n_1, \ldots, n_\ell \in \mathbb{N}$ такие, что $\mathfrak{N} \Vdash \Psi\left(\underline{n_1}, \ldots, \underline{n_\ell}\right)$. В силу теоремы 2.2, мы имеем $\mathsf{MA} \vdash \Psi\left(\underline{n_1}, \ldots, \underline{n_\ell}\right)$, откуда $\mathsf{MA} \vdash \Phi$, тем более $\Gamma \vdash \Phi$. □

$\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}$ называется Σ_1-*корректным*, если для любого Σ_1-предложения Φ,

$$\Gamma \vdash \Phi \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{N} \Vdash \Phi$$

Тут стоит отметить, что Σ_1-корректность Γ не гарантирует $\mathfrak{N} \Vdash \Gamma$, т.е. «глобальную корректность Γ». Пусть $A \subseteq \mathbb{N}^\ell$ и $\Phi(x_1, \ldots, x_\ell) \in \mathrm{Form}$. Мы будем говорить, что Φ *нумерует* A *в* Γ, если для всех $n_1, \ldots, n_\ell \in \mathbb{N}$,

$$(n_1, \ldots, n_\ell) \ \in \ A \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \vdash \Phi\left(\underline{n_1}, \ldots, \underline{n_\ell}\right).$$

Используя следствие 2.8, нетрудно получить:

Следствие 2.9

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}$ перечислимо и Σ_1-корректно, и $\mathsf{MA} \subseteq [\Gamma]$. Тогда для каждого $A \subseteq \mathbb{N}^\ell$ следующие условия эквивалентны:

i. A перечислимо;

ii. A нумеруемо в Γ;

iii. A нумеруемо в Γ некоторой Σ_1-формулой.

Доказательство. $\boxed{\mathrm{i} \Rightarrow \mathrm{iii}}$ Пусть $A \subseteq \mathbb{N}^\ell$ перечислимо. Тогда некоторая $\Phi \in \Sigma_1$ определяет A в $\mathfrak{N}$ (ввиду теоремы 1.5). Легко убедиться, что Φ нумерует A в Γ.

$\boxed{\mathrm{iii} \Rightarrow \mathrm{ii}}$ Очевидно.

$\boxed{\mathrm{ii} \Rightarrow \mathrm{i}}$ В силу перечислимости Γ. □

Замечание. На самом деле, требование Σ_1-корректности можно заменить на простую непротиворечивость, однако доказательство этого факта выходит за пределы нашего курса.

Следствие 2.10

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}$ является Σ_1-корректным. Тогда $[\Gamma]$ неразрешимо.

Доказательство. Рассмотрим
$$\Delta \;:=\; [\Gamma \cup \mathsf{MA}].$$
Нетрудно убедиться, что Δ является Σ_1-корректным:

> Пусть $\Delta \vdash \Phi$, где Φ — Σ_1-предложение. Тогда $\Gamma \vdash \bigwedge \mathsf{MA} \to \Phi$. При этом $\bigwedge \mathsf{MA} \to \Phi$, как легко понять, логически эквивалентно Σ_1-предложению. В силу Σ_1-корректности Γ, мы получаем $\mathfrak{N} \Vdash \bigwedge \mathsf{MA} \to \Phi$. Отсюда $\mathfrak{N} \Vdash \Phi$, так как $\mathfrak{N} \Vdash \mathsf{MA}$.

Теперь зафиксируем $A \subseteq \mathbb{N}$, которое перечислимо, но не разрешимо. Мы уже знаем, что некоторая Σ_1-формула Φ определяет A в $\mathfrak{N}$. Значит, для любого $n \in \mathbb{N}$,
$$n \;\in\; A \quad\Longleftrightarrow\quad \mathfrak{N} \Vdash \Phi\left(\underline{n}\right) \quad\Longleftrightarrow\quad \Delta \vdash \Phi\left(\underline{n}\right) \quad\Longleftrightarrow\quad \Phi\left(\underline{n}\right) \;\in\; [\Delta].$$
Стало быть, A сводится к $[\Delta]$, а потому $[\Delta]$ неразрешимо. Кроме того, $[\Delta]$ сводится к $[\Gamma]$, а потому $[\Gamma]$ также неразрешимо. □

1$^{\text{ая}}$ теорема Гёделя о неполноте: версия β

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}$ перечислимо и Σ_1-корректно. Тогда Γ неполно.

Доказательство. Давайте предположим, что Γ полно. Тогда Γ совпадает с $[\Gamma]$, причём Γ окажется разрешимым — это противоречит следствию 2.10. □

Теорема Чёрча (для σ_{A})

$[\varnothing]$ (в сигнатуре σ_{A}) неразрешимо.

Доказательство. Достаточно заметить, что $[\mathsf{MA}]$ сводится к $[\varnothing]$. □

3 Представимость в арифметике

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}$, $f :\subseteq \mathbb{N}^\ell \to \mathbb{N}$ и $\Phi(x_1, \ldots, x_\ell, y) \in \mathrm{Form}$. Говорят, что Φ *представляет* f *в* Γ, если для всех $(n_1, \ldots, n_\ell) \in \operatorname{dom} f$,

$$\Gamma \vdash \Phi\left(\underline{n_1}, \ldots, \underline{n_\ell}, y\right) \leftrightarrow y = \underline{f(n_1, \ldots, n_\ell)}.$$

Здесь ключевым результатом является:

Теорема 3.1: о представимости

Всякая вычислимая $f :\subseteq \mathbb{N}^\ell \to \mathbb{N}$ представляется в MA некоторой Σ_1-формулой.

Доказательство. Для наглядности мы ограничимся рассмотрением случая, когда $\ell = 1$. Так как графики вычислимых функций перечислимы, график f определяется в $\mathfrak{N}$ некоторой Σ_1-формулой $\Phi(x,y)$. При этом мы можем считать, что $\Phi(x,y)$ имеет вид

$$\exists z\, \Psi(x,y,z),$$

где $\Psi \in \Delta_0$. Введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
\Theta(x,y,u) &:= y \leqslant u \wedge (\exists z \leqslant u)\, \Psi(x,y,z); \\
\Omega(x,y,u) &:= \Theta(x,y,u) \wedge (\forall y' \leqslant u)\, ((\exists v \leqslant u)\, \Theta(x,y',v) \to y' = y).
\end{aligned}$$

Очевидно, $\Theta(x,y,u)$ и $\Omega(x,y,u)$ лежат в Δ_0. Покажем, что Σ_1-формула

$$\Phi'(x,y) := \exists u\, \Omega(x,y,u).$$

представляет f в MA. Пусть $m \in \operatorname{dom} f$ и $n = f(m)$. Нужно проверить, что

$$\mathsf{MA} \vdash \Phi'(\underline{m}, y) \leftrightarrow y = \underline{n}.$$

$\boxed{\longleftarrow}$ Ясно, что $\mathfrak{N} \Vdash \Theta(\underline{m}, \underline{n}, \underline{k})$ для достаточно большого $k \in \mathbb{N}$; более того, так как f является функцией, мы имеем $\mathfrak{N} \Vdash \Omega(\underline{m}, \underline{n}, \underline{k})$. Стало быть, в MA выводится $\Omega(\underline{m}, \underline{n}, \underline{k})$ и, следовательно, $\Phi'(\underline{m}, \underline{n})$. Таким образом, $\mathsf{MA} \vdash y = \underline{n} \to \Phi'(\underline{m}, y)$.

$\boxed{\longrightarrow}$ Будем рассуждать внутри MA. Как уже было отмечено, для подходящего $k \in \mathbb{N}$ верно $\Omega(\underline{m}, \underline{n}, \underline{k})$, т.е.

$$\Theta(\underline{m}, \underline{n}, \underline{k}) \wedge (\forall y' \leqslant \underline{k})\, ((\exists v \leqslant \underline{k})\, \Theta(\underline{m}, y', v) \to y' = \underline{n}). \tag{$\sharp$}$$

Теперь давайте предположим, что $\Omega(\underline{m}, y, u)$, т.е.

$$\Theta(\underline{m}, y, u) \wedge (\forall y' \leqslant u)\, ((\exists v \leqslant u)\, \Theta(\underline{m}, y', v) \to y' = y). \tag{$\flat$}$$

Из этого мы хотим получить $y = \underline{n}$. Отдельно разберём два случая: $u \leqslant \underline{k}$ и $\neg u \leqslant \underline{k}$.

Пусть $u \leqslant \underline{k}$. Тогда $(\exists v \leqslant \underline{k})\, \Theta(\underline{m}, y, v)$, в силу ($\flat$). Вместе с тем ($\flat$) гарантирует $y \leqslant u$, откуда $y \leqslant \underline{k}$. Стало быть, $y = \underline{n}$ ввиду ($\sharp$) (поставляя y вместо y').

Пусть $\neg u \leqslant \underline{k}$, т.е. $\underline{k} < u$. Тогда $(\exists v \leqslant u)\, \Theta(\underline{m}, \underline{n}, v)$, в силу ($\sharp$). Вместе с тем ($\sharp$) гарантирует $\underline{n} \leqslant \underline{k}$, откуда $\underline{n} < u$. Стало быть, $\underline{n} = y$ ввиду ($\flat$) (подставляя $\underline{n}$ вместо y').

В итоге $\mathsf{MA} \vdash \Omega(\underline{m}, y, u) \to y = \underline{n}$. Значит, $\mathsf{MA} \vdash \Phi'(\underline{m}, y) \to y = \underline{n}$. $\square$

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}$, $A \subseteq \mathbb{N}^\ell$ и $\Phi(x_1, \ldots, x_\ell) \in \mathrm{Form}$. Будем говорить, что Φ *бинумерует* A *в* Γ, если для всех $n_1, \ldots, n_\ell \in \mathbb{N}$,

- если $(n_1, \ldots, n_\ell) \in A$, то $\Gamma \vdash \Phi\left(\underline{n_1}, \ldots, \underline{n_\ell}\right)$;
- если $(n_1, \ldots, n_\ell) \notin A$, то $\Gamma \vdash \neg\Phi\left(\underline{n_1}, \ldots, \underline{n_\ell}\right)$.

Разумеется, когда Γ непротиворечиво, это равносильно тому, что Φ и $\neg\Phi$ нумеруют соответственно A и $\mathbb{N}^\ell \setminus A$ в Γ.

Следствие 3.2

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}$ непротиворечиво и перечислимо, и $\mathsf{MA} \subseteq [\Gamma]$. Тогда для всякого $A \subseteq \mathbb{N}^\ell$ следующие условия эквивалентны:

i. A разрешимо;

ii. A бинумеруемо в Γ;

iii. A бинумеруемо в Γ некоторой Σ_1-формулой.

Доказательство. $\boxed{\text{i} \Rightarrow \text{iii}}$ Пусть $A \subseteq \mathbb{N}^\ell$ разрешимо. Значит, некоторая $\Theta(x_1, \ldots, x_\ell, y) \in \Sigma_1$ представляет χ_A в MA. Возьмём

$$\Phi(x_1, \ldots, x_\ell) \;:=\; \Theta(x_1, \ldots, x_\ell, \underline{1}).$$

Покажем, что Φ бинумерует A в MA, тем более в Γ.

- Пусть $(n_1, \ldots, n_\ell) \in A$. Тогда в MA выводится $\Psi\left(\underline{n_1}, \ldots, \underline{n_\ell}, y\right) \leftrightarrow y = \underline{1}$. Отсюда мы имеем $\mathsf{MA} \vdash \Psi\left(\underline{n_1}, \ldots, \underline{n_\ell}, \underline{1}\right)$.
- Пусть $(n_1, \ldots, n_\ell) \in \mathbb{N}^\ell \setminus A$. Тогда в MA выводится $\Psi\left(\underline{n_1}, \ldots, \underline{n_\ell}, y\right) \leftrightarrow y = \underline{0}$. Отсюда мы имеем $\mathsf{MA} \vdash \Psi\left(\underline{n_1}, \ldots, \underline{n_\ell}, \underline{1}\right) \leftrightarrow \underline{1} = 0$, т.е. $\mathsf{MA} \vdash \neg\Psi\left(\underline{n_1}, \ldots, \underline{n_\ell}, \underline{1}\right)$ (поскольку Δ_0-предложение $\neg\underline{1} = 0$ выводится в MA).

$\boxed{\text{iii} \Rightarrow \text{ii}}$ Очевидно.

$\boxed{\text{ii} \Rightarrow \text{i}}$ В силу перечислимости Γ. $\square$

Для произвольного $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}$ обозначим

$$[\Gamma]^- \ := \ \{\Phi \in \mathrm{Sent} \mid \Gamma \vdash \neg\Phi\},$$

т.е. $[\Gamma]^-$ состоит из предложений, которые опровержимы в Γ. Для наглядности мы будем иногда писать $[\Gamma]^+$ вместо $[\Gamma]$.

Следствие 3.3

Не существует разрешимого $\Delta \subseteq \mathrm{Sent}$ такого, что

$$[\mathsf{MA}]^+ \ \subseteq \ \Delta \quad \text{и} \quad [\mathsf{MA}]^- \ \subseteq \ \mathrm{Sent} \setminus \Delta.$$

Доказательство. Зафиксируем непересекающиеся перечислимые $A, B \subseteq \mathbb{N}$, которые вычислимо неотделимы, и зададим $f : \subseteq \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ по правилу

$$f(n) \ := \ \begin{cases} 1 & \text{если } \ n \in A, \\ 0 & \text{если } \ n \in B, \\ \uparrow & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ясно, что f вычислима. Значит, некоторая $\Theta(x, y) \in \Sigma_1$ представляет f в MA. Возьмём

$$\Phi(x) \ := \ \Theta(x, \underline{1}).$$

Нетрудно показать, что для всех $n \in \mathbb{N}$:

- если $n \in A$, то $\mathsf{MA} \vdash \Phi(\underline{n})$;
- если $n \in B$, то $\mathsf{MA} \vdash \neg\Phi(\underline{n})$.[4]

Теперь предположим, что существует разрешимое Δ такое, что

$$[\mathsf{MA}]^+ \ \subseteq \ \Delta \quad \text{и} \quad [\mathsf{MA}]^- \ \subseteq \ \mathrm{Sent} \setminus \Delta.$$

Рассмотрим $C := \{n \in \mathbb{N} \mid \Phi(\underline{n}) \in \Delta\}$. Очевидно, C разрешимо. Кроме того, для каждого $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} n & \in & A & \Rightarrow & \Phi(\underline{n}) & \in & [\mathsf{MA}]^+ & \Rightarrow & \Phi(\underline{n}) & \in & \Delta & \Rightarrow & n \in C; \\ n & \in & B & \Rightarrow & \Phi(\underline{n}) & \in & [\mathsf{MA}]^- & \Rightarrow & \Phi(\underline{n}) & \notin & \Delta & \Rightarrow & n \notin C. \end{array}$$

Итак, $A \subseteq C$ и $B \subseteq \mathbb{N} \setminus C$, т.е. C отделяет A и B — противоречие. $\square$

---

[4] Ср. доказательство следствия 3.2.

Следствие 3.4

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}$ непротиворечиво, и $\mathsf{MA} \subseteq [\Gamma]$. Тогда $[\Gamma]$ неразрешимо.

Доказательство. Достаточно заметить, что $[\mathsf{MA}] \subseteq [\Gamma]$ и $[\mathsf{MA}]^- \subseteq \mathrm{Sent} \setminus [\Gamma]$. $\square$

1ая теорема Гёделя о неполноте: версия Россера

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}$ непротиворечиво и перечислимо, и $\mathsf{MA} \subseteq [\Gamma]$. Тогда Γ неполно.

Доказательство. Давайте предположим, что Γ полно. Тогда Γ совпадает с $[\Gamma]$, причём Γ окажется разрешимым — это противоречит следствию 3.4. $\square$

Вариант Чейтина $1^{\text{ой}}$ теоремы Гёделя

В этом варианте используется уже знакомое нам понятие колмогоровской сложности, но слегка адаптированное для работы с натуральными числами (вместо конечных последовательностей нулей и единиц). Определим $K :\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ по правилу

$$K(n) \;:=\; \min\{k \in \mathbb{N} \mid U_k(0) = n\},$$

где U — фиксированная главная универсальная функция для класса всех частичных вычислимых одноместных функций.[5]

Лемма 3.5

Не существует вычислимой $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такой, что $K(f(n)) > n$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Давайте предположим, что такая f существует. Зададим вычислимую $V :\subseteq \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ по правилу

$$V(n, m) \;:=\; f(n).$$

Поскольку U — главная, найдётся вычислимая $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, которая удовлетворяет

$$U_{g(n)} \;=\; V_n \quad \text{для всех} \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Далее, в силу теоремы о неподвижной точке, для некоторого $e \in \mathbb{N}$ мы имеем $U_e = U_{g(e)}$. В частности,

$$U_e(0) \;=\; U_{g(e)}(0) \;=\; V_e(0) \;=\; f(e),$$

откуда $K(f(e)) \leqslant e$ — противоречие. $\square$

Если формула Φ имеет вид $\forall \vec{x}\, \Psi$, где $\Psi \in \Delta_0$, то Φ называют Π_1-*формулой* и при этом пишут $\Phi \in \Pi_1$. Очевидно, Π_1-формулы логически эквивалентны отрицаниям Σ_1-формул. Значит, всякое множество, дополнение которого перечислимо, будет Π_1-определимо в $\mathfrak{N}$. В частности, легко понять, что двухместный предикат

$$\left\{(m, n) \in \mathbb{N}^2 \mid K(m) > n\right\}$$

определим в $\mathfrak{N}$ посредством подходящей Π_1-формулы $\mathrm{Kolm}(x, y)$.

Лемма 3.6

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}$ непротиворечиво, и $\mathsf{MA} \subseteq [\Gamma]$. Тогда для любого Π_1-предложения Φ,

$$\Gamma \vdash \Phi \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{N} \Vdash \Phi.$$

[5]Здесь U_k обозначает $\lambda n.[U(k, n)]$.

Доказательство. Пусть Φ имеет вид $\forall x_1 \dots \forall x_\ell \, \Psi(x_1, \dots, x_\ell)$, где $\Psi \in \Delta_0$, и $\Gamma \vdash \Phi$. Ясно, что для всех $n_1, \dots, n_\ell \in \mathbb{N}$ мы имеем $\mathsf{MA} \nvdash \neg\Psi\left(\underline{n_1}, \dots, \underline{n_\ell}\right)$ (так как Γ непротиворечиво), откуда $\mathsf{MA} \vdash \Psi\left(\underline{n_1}, \dots, \underline{n_\ell}\right)$ и, следовательно, $\mathfrak{N} \Vdash \Psi\left(\underline{n_1}, \dots, \underline{n_\ell}\right)$. Стало быть, $\mathfrak{N} \Vdash \Phi$. □

1ая теорема Гёделя о неполноте: версия Чейтина

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}$ непротиворечиво и перечислимо, и $\mathsf{MA} \subseteq [\Gamma]$. Тогда существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\Gamma \nvdash \mathrm{Kolm}\left(\underline{m}, \underline{n}\right)$ для всех $m \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Предположим, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что $\Gamma \vdash \mathrm{Kolm}\left(\underline{m}, \underline{n}\right)$. Тогда, поскольку $[\Gamma]$ перечислимо, найдётся вычислимая $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, которая удовлетворяет

$$\Gamma \vdash \mathrm{Kolm}(\underline{f(n)}, \underline{n}) \quad \text{для всех } \; n \in \mathbb{N}.$$

Но, в силу леммы 3.6, из $\Gamma \vdash \mathrm{Kolm}(\underline{f(n)}, \underline{n})$ следует $\mathfrak{N} \Vdash \mathrm{Kolm}(\underline{f(n)}, \underline{n})$, т.е. $K(f(n)) > n$. Это противоречит лемме 3.5. □

4 Диагонализация

Ранее нами была введена нумерация

$$\# : \ \mathrm{Term} \cup \mathrm{Form} \ \to \ \mathbb{N}.$$

Её действие можно без труда распространить на конечные последовательности термов и формул. Для каждого разрешимого $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}$ возьмём

$$P_\Gamma \ := \ \{(\#(w), \#(\Phi)) \mid w \text{ является выводом } \Phi \text{ в } \Gamma\}.$$

Разумеется, P_Γ разрешимо. Поэтому найдётся Σ_1-формула $\mathrm{Proof}_\Gamma(x, y)$, которая бинумерует P_Γ в MA. Нас будет интересовать поведение производной Σ_1-формулы

$$\mathrm{Prov}_\Gamma(x) \ := \ \exists u \, \mathrm{Proof}_\Gamma(u, x).$$

Отметим, что $\mathrm{Proof}_\Gamma(x, y)$, помимо прочего, определяет P_Γ в $\mathfrak{N}$, а потому $\mathrm{Prov}_\Gamma(x)$ будет определять $\{\#(\Phi) \mid \Gamma \vdash \Phi\}$ в $\mathfrak{N}$. Для произвольной $\Phi \in \mathrm{Form}$ обозначим

$$\ulcorner \Phi \urcorner \ := \ \underline{\#(\Phi)} \quad \text{и} \quad \Box_\Gamma \Phi \ := \ \mathrm{Prov}_\Gamma(\ulcorner \Phi \urcorner).$$

Интуитивно $\Box_\Gamma$ — это *предикат доказуемости для* Γ.

Замечание. Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}$ перечислимо, но не разрешимо. Очевидно, Γ непусто, а потому его элементы можно расположить в вычислимую последовательность:

$$\Psi_0, \quad \Psi_1, \quad \Psi_2, \quad \ldots$$

Рассмотрим

$$\Delta \ := \ \Big\{ \bigwedge\nolimits_{i=0}^{n} \Psi_i \mid n \in \mathbb{N} \Big\}.$$

Ясно, что для любой $\Phi \in \mathrm{Form}$,

$$\Gamma \vdash \Phi \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta \vdash \Phi.$$

Кроме того, используя монотонность $\#$, легко проверить, что Δ разрешимо.

Таким образом, не важно, задается ли (дедуктивно замкнутая) теория перечислимым или разрешимым множеством предложений.

Утверждение 4.1

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}$ разрешимо. Тогда для любой $\Phi \in \mathrm{Form}$,

$$\Gamma \vdash \Phi \quad \Longleftrightarrow \quad \mathsf{MA} \vdash \Box_\Gamma \Phi.$$

Доказательство. $\boxed{\Longrightarrow}$ Пусть $\Gamma \vdash \Phi$. Зафиксируем какой-нибудь вывод

$$\Psi_0, \ \ldots, \ \Psi_n \ = \ \Phi$$

из Γ и возьмём $k := \#(\Psi_0, \ldots, \Psi_n)$. Очевидно, $\mathfrak{N} \Vdash \mathrm{Proof}_\Gamma(\underline{k}, \ulcorner \Phi \urcorner)$. Стало быть, в MA выводится $\mathrm{Proof}_\Gamma(\underline{k}, \ulcorner \Phi \urcorner)$ и, следовательно, $\mathrm{Prov}_\Gamma(\ulcorner \Phi \urcorner)$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Пусть $\mathsf{MA} \vdash \Box_\Gamma \Phi$. Тогда $\mathfrak{N} \Vdash \mathrm{Prov}_\Gamma(\ulcorner \Phi \urcorner)$, а потому $\Gamma \vdash \Phi$. $\Box$

С помощью предикатов доказуемости можно дать альтернативное доказательство $1^{\text{ой}}$ теоремы Гёделя о неполноте. Ключевую роль тут играет:

Лемма 4.2: о диагонализации

Для всякой $\Psi(x) \in \mathrm{Form}$ найдётся $\Phi \in \mathrm{Sent}$ такое, что

$$\mathsf{MA} \vdash \Phi \leftrightarrow \Psi(\ulcorner \Phi \urcorner).$$

Доказательство. Нам понадобится $\mathrm{sub} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, действующая по правилу

$$\mathrm{sub}(m,n) \;:=\; \begin{cases} \#(\Theta(\underline{n})) & \text{если } m = \#(\Theta(x)) \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Очевидно, sub вычислима. Поэтому найдётся $\mathrm{Sub}(x,y,z) \in \Sigma_1$, которая представляет sub в MA, т.е. для всех $m, n \in \mathbb{N}$,

$$\mathsf{MA} \vdash \mathrm{Sub}(\underline{m}, \underline{n}, y) \leftrightarrow y = \underline{\mathrm{sub}(m,n)}. \tag{$\star$}$$

Рассмотрим теперь произвольную $\Psi(x) \in \mathrm{Form}$. Возьмём

$$\Omega(x) \;:=\; \exists y\,(\mathrm{Sub}(x,x,y) \wedge \Psi(y)) \quad \text{и} \quad k \;:=\; \#(\Omega(x))$$

Используя $(\star)$, в MA можно получить следующую цепочку эквивалентностей:

$$\begin{aligned} \Omega(\underline{k}) &= \exists y\,(\mathrm{Sub}(\underline{k}, \underline{k}, y) \wedge \Psi(y)) \\ &= \exists y\,(\mathrm{Sub}(\ulcorner \Omega(x) \urcorner, \underline{k}, y) \wedge \Psi(y)) \\ &\leftrightarrow \exists y\,(y = \ulcorner \Omega(\underline{k}) \urcorner \wedge \Psi(y)) \\ &\leftrightarrow \Psi(\ulcorner \Omega(\underline{k}) \urcorner). \end{aligned}$$

Стало быть, $\Omega(\underline{k})$ годится в качестве Φ. $\square$

Диагонализация позволяет по-другому получить результат, из которого мы выводили версию Россера $1^{\text{ой}}$ теоремы Гёделя о неполноте:

Следствие 3.4

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}$ непротиворечиво, и $\mathsf{MA} \subseteq [\Gamma]$. Тогда $[\Gamma]$ неразрешимо.

Другое доказательство. Предположим, что $[\Gamma]$ разрешимо. Тогда некоторая $\Theta_\Gamma(x) \in \Sigma_1$ бинумерует $[\Gamma]$ в MA. В частности, для любого $\Phi \in \mathrm{Sent}$,

$$\Gamma \nvdash \Phi \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \vdash \neg\Theta_\Gamma(\ulcorner\Phi\urcorner).$$

В силу леммы 4.2, найдётся $\Psi \in \mathrm{Sent}$ такое, что

$$\mathsf{MA} \vdash \Psi \leftrightarrow \neg\Theta_\Gamma(\ulcorner\Psi\urcorner).$$

Но тогда, как легко убедиться, $\Gamma \nvdash \Psi$ окажется равносильно $\Gamma \vdash \Psi$ — противоречие. □

Кроме того, в качестве простого примера применения диагонализации выступает:

Теорема Тарского о неопределимости истины

$\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ неопределимо в $\mathfrak{N}$.[6]

Доказательство. Предположим, что некоторая $\mathrm{T}(x) \in \mathrm{Form}$ определяет $\#[\mathrm{Th}(\mathfrak{N})]$ в $\mathfrak{N}$, т.е. для любого $\Phi \in \mathrm{Sent}$,

$$\mathfrak{N} \Vdash \Phi \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{N} \Vdash \mathrm{T}(\ulcorner\Phi\urcorner).$$

В силу леммы 4.2, найдётся $\Theta \in \mathrm{Sent}$ такое, что

$$\mathsf{MA} \vdash \Theta \leftrightarrow \neg\mathrm{T}(\ulcorner\Theta\urcorner).$$

Но тогда, как легко видеть, $\mathfrak{N} \Vdash \Theta$ окажется равносильно $\mathfrak{N} \Vdash \neg\Theta$ — противоречие. □

[6]Это можно доказать и без леммы 4.2, используя строгость арифметической иерархии.

Об условиях Лёба

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}$ разрешимо. Мы будем называть Prov_Γ *правильным*, если $\mathsf{MA} \subseteq [\Gamma]$, и для всех $\Phi, \Psi \in \mathrm{Form}$:

P1. если $\Gamma \vdash \Phi$, то $\Gamma \vdash \Box_\Gamma \Phi$;

P2. $\Gamma \vdash \Box_\Gamma (\Phi \to \Psi) \to (\Box_\Gamma \Phi \to \Box_\Gamma \Psi)$;

P3. $\Gamma \vdash \Box_\Gamma \Phi \to \Box_\Gamma \Box_\Gamma \Phi$.

В литературе эти три условия именуются *условиями Лёба.*

В силу утверждения 4.1, если $\mathsf{MA} \subseteq [\Gamma]$, то Prov_Γ удовлетворяет P1. Однако с P2 и P3 дела обстоят куда сложнее. Отметим без доказательства: Если $\mathsf{PA} \subseteq [\Gamma]$, то стандартным образом построенный предикат доказуемости для Γ является правильным.

Для краткости обозначим $0 \neq 0$ через $\bot$. Очевидно, $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}$ непротиворечиво, если и только если в Γ нельзя вывести $\bot$.

Утверждение 4.3

Пусть Prov_Γ удовлетворяет P1, и $\Gamma \nvdash \bot$. Тогда для любого $\Phi \in \mathrm{Sent}$,

$$\Gamma \vdash \Phi \to \underbrace{\neg \mathrm{Prov}_\Gamma (\ulcorner \Phi \urcorner)}_{\neg \Box_\Gamma \Phi} \quad \Longrightarrow \quad \Gamma \nvdash \Phi.$$

Доказательство. Предположим, что $\Gamma \vdash \Phi \to \neg\Box_\Gamma \Phi$ и при этом $\Gamma \vdash \Phi$. Тогда $\Gamma \vdash \neg\Box_\Gamma \Phi$ и $\Gamma \vdash \Box_\Gamma \Phi$ (в силу P1). Это противоречит непротиворечивости Γ. □

Замечание. Пусть к тому же $\mathfrak{N} \Vdash \Gamma$. Тогда для любого $\Phi \in \mathrm{Sent}$, если $\Gamma \vdash \Phi \leftrightarrow \neg\Box_\Gamma \Phi$, то $\Gamma \nvdash \Phi$, откуда $\mathfrak{N} \Vdash \neg\Box_\Gamma \Phi$, т.е. $\mathfrak{N} \Vdash \Phi$.

С помощью этого простого наблюдения получается:

$2^{\text{ая}}$ теорема Гёделя о неполноте (для σ_{A})

Пусть Prov_Γ *— правильный. Тогда:*

$$\Gamma \nvdash \bot \quad \Longrightarrow \quad \Gamma \nvdash \neg\Box_\Gamma \bot.$$

Доказательство. Для краткости мы будем опускать нижний индекс $\cdot_\Gamma$. В силу леммы о диагонализации, найдётся $\Phi \in \mathrm{Sent}$ такое, что

$$\mathsf{MA} \vdash \Phi \leftrightarrow \underbrace{\neg\mathrm{Prov}\left(\ulcorner\Phi\urcorner\right)}_{\neg\Box\Phi}$$

Оказывается, что в Γ можно вывести $\Box\Phi \to \Box\bot$:

1	$\Phi \to \neg\Box\Phi$	по построению Φ
2	$\Box\Phi \to \neg\Phi$	1
3	$\neg\Phi \to (\Phi \to \bot)$	
4	$\Box\Phi \to (\Phi \to \bot)$	2, 3
5	$\Box\left(\Box\Phi \to (\Phi \to \bot)\right)$	4; P1
6	$\Box\Box\Phi \to \Box\left(\Phi \to \bot\right)$	5; P2
7	$\Box\left(\Phi \to \bot\right) \to (\Box\Phi \to \Box\bot)$	P2
8	$\Box\Box\Phi \to (\Box\Phi \to \Box\bot)$	6, 7
9	$\Box\Phi \to (\Box\Box\Phi \to \Box\bot)$	8
10	$\Box\Phi \to \Box\Box\Phi$	P3
11	$\Box\Phi \to \Box\bot$	9, 10.[7]

Стало быть, $\Gamma \vdash \neg\Box\bot \to \neg\Box\Phi$, откуда $\Gamma \vdash \neg\Box\bot \to \Phi$. При этом (ввиду утверждения 4.3) мы имеем $\Gamma \nvdash \Phi$, а потому $\Gamma \nvdash \neg\Box\bot$. $\square$

Следствие 4.4

$\mathsf{PA} \nvdash \neg\Box_{\mathsf{PA}}\bot$ для стандартным образом построенного $\mathrm{Prov}_{\mathsf{PA}}$. $\square$

Замечание. Очевидно, в PA нельзя вывести $\Box_{\mathsf{PA}}\bot$, поскольку $\mathfrak{N} \Vdash \neg\Box_{\mathsf{PA}}\bot$.

[7] Обратная импликация тоже выводима в Γ, причём здесь не нужны ни P3, ни свойства Φ:

1	$\neg\bot$	
2	$\neg\bot \to (\bot \to \Phi)$	
3	$\bot \to \Phi$	1, 2
4	$\Box\left(\bot \to \Phi\right)$	3; P1
5	$\Box\bot \to \Box\Phi$	4, P2.

Определим PA^0, PA^1, PA^2, $\ldots$ следующим образом:

$$\begin{cases} \mathsf{PA}^0 & := \ \mathsf{PA} \\ \mathsf{PA}^{n+1} & := \ \mathsf{PA}^n \cup \{\neg\Box_{\mathsf{PA}^n}\bot\} \end{cases}$$

В силу 2$^{\text{ой}}$ теоремы Гёделя о неполноте, мы имеем

$$\left[\mathsf{PA}^0\right] \ \subsetneq \ \left[\mathsf{PA}^1\right] \ \subsetneq \ \left[\mathsf{PA}^2\right] \ \subsetneq \ \ldots,$$

т.е. дедуктивная сила теорий будет строго возрастать. Далее, определим

$$\begin{cases} \mathsf{PA}^{\omega+0} & := \ \bigcup_{n<\omega} \mathsf{PA}^n \\ \mathsf{PA}^{\omega+(n+1)} & := \ \mathsf{PA}^{\omega+n} \cup \{\neg\Box_{\mathsf{PA}^{\omega+n}}\bot\} \end{cases}$$

Очевидно, $[\mathsf{PA}^n] \subsetneq [\mathsf{PA}^\omega]$ для всех $n < \omega$, и снова имеют место строгие включения:

$$[\mathsf{PA}^\omega] \ \subsetneq \ \left[\mathsf{PA}^{\omega+1}\right] \ \subsetneq \ \left[\mathsf{PA}^{\omega+2}\right] \ \subsetneq \ \ldots$$

Продолжая этот процесс, можно определить PA^α для любого «конструктивного» ординала α. Однако мы не будем этого делать, чтобы не перегружать текст.

Ясно, что предикаты доказуемости можно строить и для богатых теорий вроде ZFC и её расширений.[8] Тогда получится, что

$$T \nvdash \bot \quad \Longrightarrow \quad T \nvdash \neg\Box_T\bot.$$

При этом чем богаче T, тем больше сомнений вызывает её непротиворечивость, особенно когда абстрактный характер T затрудняет восприятие её «стандартной модели».

Замечание. Непротиворечивость T может, конечно, выводиться в другой, более богатой T'. Но непротиворечивость такой T' ещё сложнее обосновать.

[8] Для этого достаточно, чтобы в них «интерпретировалась» PA; см. следующий раздел.

Следствие 4.5

Пусть Prov_Γ — правильный, и $\Gamma \nvdash \bot$. Тогда $\Gamma \nvdash \neg\Box_\Gamma\Phi$ для любого $\Phi \in \mathrm{Sent}$.

Доказательство. Предположим, что $\Gamma \vdash \neg\Box_\Gamma\Phi$. Тогда в Γ выводится $\neg\Box_\Gamma\bot$:

1	$\bot \to \Phi$	
2	$\Box(\bot \to \Phi)$	1, L1
3	$\Box\bot \to \Box\Phi$	2, L2
4	$\neg\Box\Phi \to \neg\Box\bot$	3
5	$\neg\Box\Phi$	по предположению
6	$\neg\Box\bot$	5, 4.

Это противоречит $2^{\text{ой}}$ теореме Гёделя. □

Упражнение 1

Пусть Prov_Γ — правильный, и $\Gamma \nvdash \Box_\Gamma\bot$. Тогда $\Gamma \nvdash \Phi \to \Box_\Gamma\Phi$ для некоторого $\Phi \in \mathrm{Sent}$.[9]

[9] На самом деле, тут не нужно P3.

В ходе изучения предикатов доказуемости довольно естественно возникает вопрос:

— Что можно сказать о предложениях, утверждающих свою доказуемость?

На этот вопрос можно получить простой и исчерпывающий ответ.

Теорема Лёба (для σ_{A})

Пусть Prov_Γ — правильный. Тогда для любого $\Phi \in \mathrm{Sent}$,

$$\Gamma \vdash \Box_\Gamma \Phi \to \Phi \quad \Longrightarrow \quad \Gamma \vdash \Phi.$$

Доказательство. Пусть $\Gamma \vdash \Box_\Gamma \Phi \to \Phi$. Возьмём

$$\Psi(x) \;:=\; \mathrm{Prov}_\Gamma(x) \to \Phi.$$

Применив к $\Psi(x)$ лемму 4.2, мы получим $\Theta \in \mathrm{Sent}$ такое, что

$$\mathsf{MA} \vdash \Theta \leftrightarrow (\underbrace{\mathrm{Prov}_\Gamma(\ulcorner\Theta\urcorner)}_{\Box_\Gamma\Theta} \to \Phi).$$

Теперь Φ можно вывести в Γ следующим образом:

1	$\Theta \to (\Box\Theta \to \Phi)$	по построению Θ
2	$\Box(\Theta \to (\Box\Theta \to \Phi))$	1, L1
3	$\Box\Theta \to \Box(\Box\Theta \to \Phi)$	2, L2
4	$\Box(\Box\Theta \to \Phi) \to (\Box\Box\Theta \to \Box\Phi)$	L2
5	$\Box\Theta \to (\Box\Box\Theta \to \Box\Phi)$	3, 4
6	$\Box\Theta \to \Box\Box\Theta$	L3
7	$\Box\Theta \to \Box\Phi$	5, 6
8	$\Box\Phi \to \Phi$	по предположению
9	$\Box\Theta \to \Phi$	7, 8
10	$(\Box\Theta \to \Phi) \to \Theta$	по построению Θ
11	Θ	9, 10
12	$\Box\Theta$	11, L1
13	Φ	12, 9.

$\Box$

Следствие 4.6

Пусть Prov_Γ — правильный. Тогда для любого $\Phi \in \mathrm{Sent}$,

$$\Gamma \vdash \Box_\Gamma \Phi \leftrightarrow \Phi \iff \Gamma \vdash \Box_\Gamma \Phi \to \Phi \iff \Gamma \vdash \Phi.$$

□

В частности, теорема Лёба гарантирует, что для каждого правильного Prov_Γ,

$$\Gamma \vdash \bot \iff \Gamma \vdash \Box\bot \to \bot \iff \Gamma \vdash \neg\Box\bot.$$

Поэтому $2^{\text{ую}}$ теорему Гёделя о неполноте можно ещё воспринимать как следствие теоремы Лёба. Наконец, стоит отметить, что в Γ выводится «теорема Леба для Γ»:

Упражнение 2

Пусть Prov_Γ — правильный. Тогда $\Gamma \vdash \Box_\Gamma (\Box_\Gamma \Phi \to \Phi) \to \Box_\Gamma \Phi$ для всех $\Phi \in \mathrm{Sent}$.