Примеры вопросов по «Математической логике II»

1. Какие множества называются *перечислимыми*? Покажите, что множество перечислимо, если и только если его полухарактеристическая функция вычислима.
2. Покажите, что перечислимые множества замкнуты относительно конечных пересечений и объединений. Что можно сказать про дополнения перечислимых множеств?
3. Опишите отношения $\mathfrak{m}$-сводимости и $\mathfrak{m}$-эквивалентности. Покажите, что разрешимые и перечислимые множества замкнуты вниз относительно $\mathfrak{m}$-сводимости.
4. Опишите нумерацию $\#$ для сигнатуры арифметики. Покажите, что $\#$ инъективна.
5. Покажите, что $\#\,[\mathrm{Term}_\sigma]$ (где σ — сигнатура арифметики) разрешимо.
6. Покажите, что перечислимость Γ влечёт перечислимость $[\Gamma]$. Верно ли обратное?
7. Покажите, что если Γ непротиворечиво и $[\Gamma]$ разрешимо, то можно найти полное разрешимое непротиворечивое Δ, которое включает Γ.
8. Γ допускает *(эффективную) элиминацию кванторов*, если … При каких условиях э.к. гарантирует э.э.к.? Как э.э.к. связана с разрешимостью $[\Gamma]$?
9. Сформулируйте базовый критерий эффективной элиминации кванторов; докажите его.
10. Покажите, опуская мелкие детали, что $\mathrm{Th}\,(\mathfrak{Q})$ допускает э.э.к.[1]
11. Выпишите явные аксиомы для $\mathrm{Th}\,(\mathfrak{Q})$. Обоснуйте свой ответ посредством доказательства.
12. Какие подмножества $\mathbb{Q}$ определимы в $\mathfrak{Q}$? Обоснуйте свой ответ двумя различными способами — см. лекции.
13. Приведите схему доказательства того, что $\mathrm{Th}\,(\mathfrak{Z}^{\equiv})$ допускает э.э.к.[2]
14. Какие подмножества $\mathbb{Z}$ называются *полулинейными*? Покажите, что полулинейные множества замкнуты относительно конечных пересечений и объединений. Что Вы можете сказать про счётные объединения/пересечения полулинейных множеств?
15. Покажите, что любое подмножество $\mathbb{Z}$, определимое в $\mathfrak{Z}$, полулинейно.
16. Выпишите явные аксиомы для $\mathrm{Th}\,(\mathfrak{Z}^{\equiv})$. Покажите, что в соответствующей теории можно вывести $t = \underline{t^{\mathfrak{Z}}}$ для любого замкнутого терма t.
17. Опишите два варианта явной аксиоматики для $\mathrm{Th}\,(\mathfrak{Z})$: 1) со схемой аксиом для сравнений по модулю; 2) со схемой индукции. Покажите, что (1) выводится из (2).
18. Что такое PrA? Выведите в PrA закон ассоциативности сложения.
19. Выведите в PrA закон коммутативности сложения, пользуясь ассоциативностью сложения.
20. Выведите в PrA аксиомы строгих линейных порядков.
21. Что такое *решётка*? Как можно определить $x \leqslant y$ в теории решёток? Выведите в теории решёток аксиомы [нестрогих] частичных порядков.

[1] Здесь $\mathfrak{Q}$ обозначает строго (линейно) упорядоченное множество рациональных чисел.
[2] Здесь $\mathfrak{Z}$ — дискретно упорядоченная группа целых чисел по сложению, а $\mathfrak{Z}^{\equiv}$ — её специальное обогащение.

22. Какие решётки называют *дистрибутивными*? *Ограниченными*? Что такое *дополнение* элемента в решётке? Покажите, что дополнения определяется однозначно.

23. Какие подмножества $\mathbb{R}^n$ называются *полиномиальными*? Какие функции в нашем курсе называются *хорошими*?

24. Покажите, что композиция хороших функций хороша.

25. Сформулируйте базовый критерий хорошести функции; докажите его.

26. Сформулируйте утверждение о делении полиномов (степени $\leqslant k$) с точки зрения хороших функций; докажите его.

27. Сформулируйте «основную лемму», относящуюся к хорошим функциям, и покажите, что μ, вычисляющая число корней данного полинома, хороша.

28. Сформулируйте «основную лемму», относящуюся к хорошим функциям, и покажите, что $\eta_1, \ldots, \eta_k$, вычисляющие корни данного полинома, хороши.[3]

29. С помощью «основной леммы» покажите, что $\mathrm{Th}\,(\mathfrak{R})$ допускает э.к.[4]

30. Выведите в теории линейно упорядоченных полей:

    (a) $x \neq 0 \to 0 < x \cdot x$;

    (b) $x < y \to \exists u\, x < u < y$.

31. *Вещественно замкнутыми полями* называются модели RCF. Что такое RCF? Опишите альтернативную явную аксиоматику для [RCF]. Приведите другое, более «алгебраическое» определение вещественной замкнутости.

32. Что такое PA? Выведите в PA законы дистрибутивности.

33. Выведите в PA закон коммутативности умножения.

34. Что такое Δ_0- и Σ_1-*формулы*? Покажите, что Δ_0-определимые в $\mathfrak{N}$ множества разрешимы, а Σ_1-определимые — перечислимы.

35. Сформулируйте лемму о Σ_1-определимости в $\dot{\mathfrak{N}}$. Каким образом в её доказательстве кодируются слова в фиксированном конечном алфавите?

36. Какие множества называют Δ_1-*определимыми* [в $\mathfrak{N}$ или её обогащениях]? Покажите, что обогащение $\mathfrak{N}$ посредством добавления Δ_1-определимых предикатов не приводит к расширению класса Δ_1-определимых множеств.

37. Что такое *функция Гёделя*, γ? Сформулируйте основное утверждение о γ. Покажите, что $\lambda x.[2^x]$ является Δ_1-определимой в $\mathfrak{N}$.

38. Какие множества называют *диофантовыми*? Что такое $\mathsf{DE}\,(\mathfrak{N})$? Сформулируйте теорему М.–Р.–Д.–П. С её помощью покажите, что $\mathsf{DE}\,(\mathfrak{N})$ неразрешимо.

39. Не используя теорему М.–Р.–Д.–П., покажите, что $\mathsf{DE}\,(\mathfrak{N})$ и $\mathsf{DE}\,(\mathfrak{Z})$ m-эквивалентны.

40. Покажите, что любое диофантовое множество может быть определено в $\mathfrak{N}$ некоторой формулой вида $\exists \vec{y}\, t_1 = t_2$, где t_1 и t_2 суть полиномы степени $\leqslant 4$.

[3] Тут предполагается известным, что μ хороша.

[4] Здесь $\mathfrak{R}$ — упорядоченное поле вещественных чисел.

41. Что такое MA в нашем курсе? Покажите, что $[\mathsf{MA}] \subseteq [\mathsf{PA}]$.

42. Что такое *арифметика Робинсона*, RA? Покажите, что $[\mathsf{MA}] \subsetneq [\mathsf{RA}]$ и $[\mathsf{RA}] \subsetneq [\mathsf{MA}]$.

43. Сформулируйте теорему о Δ_0-полноте MA; приведите схему её доказательства.

44. Что такое *нумеруемость в* Γ? Как она связана с перечислимостью?

45. Используя теорему о Σ_1-определимости в $\mathfrak{N}$, покажите, что если Γ является Σ_1-корректным, то $[\Gamma]$ неразрешимо.

46. Что такое *представимость в* Γ? Покажите, что при весьма скромных предположениях представимость всюду определённой функции влечёт нумеруемость её графика.

47. Сформулируйте теорему о представимости [ч.в.ф.] в MA; приведите схему её док-ва.

48. Что такое *бинумеруемость в* Γ? Как она связана с разрешимостью?

49. Используя теорему о представимости [ч.в.ф.] в MA, покажите, что $[\mathsf{MA}]^+$ и $[\mathsf{MA}]^-$ нельзя отделить разрешимым множеством предложений.

50. Сформулируйте версию Россера $1^{\text{ой}}$ теоремы Гёделя о неполноте. Следствием какого результата в нашем курсе она является?

51. Сформулируйте версию Чейтина $1^{\text{ой}}$ теоремы Гёделя о неполноте; пользуясь известными результатами о колмогоровской сложности, приведите схему её доказательства.

52. Покажите, что для каждого перечислимого Γ найдётся разрешимое Δ такое, что $[\Delta] = [\Gamma]$.

53. Как в нашем курсе определяется $\mathrm{Prov}_\Gamma(x)$? Покажите, что $\Gamma \vdash \Phi$ равносильно $\mathsf{MA} \vdash \Box_\Gamma \Phi$, где $\Box_\Gamma \Phi$ — сокращение для $\mathrm{Prov}_\Gamma(\ulcorner \Phi \urcorner)$.

54. Сформулируйте лемму о диагонализации; докажите её.

55. Докажите версию Россера $1^{\text{ой}}$ теоремы Гёделя о неполноте с помощью леммы о диагонализации.

56. Сформулируйте теорему Тарского о неопределимости истины (в арифметике); докажите её, пользуясь леммой о диагонализации.

57. Что такое *условия Лёба*, обозначаемые L1, L1, L3? Когда Prov_Γ называется *правильным* (в рамках нашего курса)? Покажите, что L2 влечёт «кратное L2».

58. Покажите, что при наличии L1 и L2 в Γ выводится дистрибутивность $\Box_\Gamma$ относительно $\wedge$. Что можно сказать про дистрибутивность $\Box_\Gamma$ относительно $\vee$?

59. Сформулируйте $2^{\text{ую}}$ теорему Гёделя о неполноте (для σ_A); докажите её.

60. Сформулируйте теорему Лёба (для σ_A); докажите её.

61. Пусть Prov_Γ — правильный, и $\Gamma \nvdash \bot$. Существует ли $\Phi \in \mathsf{Sent}$ такое, что $\Gamma \vdash \neg\Box_\Gamma \Phi$? Ответ следует обосновать, разумеется.

62. Что такое $\mathbb{F}$ в нашем курсе? Что такое $\mathbb{I}$? Покажите, что если $a \in \mathbb{R}^\sharp \setminus \mathbb{F}$, то $1/a \in \mathbb{I}$.

63. Покажите, что если $S \subseteq \mathbb{R}$ неограничено, то $S^\sharp \nsubseteq \mathbb{F}$. Определимо ли $\mathbb{N}$ в $\mathfrak{R}^\sharp$?

64. Покажите, что если мы будем рассматривать $\mathbb{R}^\sharp$ как кольцо, то $\mathbb{F}$ будет его подкольцом, а $\mathbb{I}$ — идеалом этого подкольца.

65. Что такое $\approx$ в нашем курсе? Покажите, что $\approx$ является отношение эквивалентности на $\mathbb{R}^\sharp$.

66. Покажите, что если $a \approx b$ и $c \approx d$, причём $\{a, b, c, d\} \subseteq \mathbb{F}$, то $a \cdot c \approx b \cdot d$. Далее, покажите, что условие «$\{a, b, c, d\} \subseteq \mathbb{F}$» здесь по существу. Что можно сказать про $+$ и $-$?

67. Покажите, что если $a < b$, $a \not\approx b$ и $\{a, b\} \subseteq \mathbb{F}$, то найдётся $r \in \mathbb{R}$ такое, что $a < r < b$.

68. Опишите функцию st. Сформулируйте основные свойства st; докажите их.

69. Дайте «нестандартное» определение сходимости в терминах инфинитезималов. Покажите, что «нестандартная» сходимость влечёт сходимость в смысле эпсилон-дельта.

70. Покажите, что сходимость в смысле эпсилон-дельта влечёт «нестандартную» сходимость.

71. Вычислите производную $\lambda^{\mathbb{R}} x.\, \left[x^3\right]$ с помощью инфинитезималов.

72. С помощью инфинитезималов покажите, что из существования производной у функции в данной точке следует непрерывность функции в этой точке.

. . . .

Обновлено: 21 декабря 2020 г.