Математическая логика:
Немного нестандартного анализа

Станислав Олегович Сперанский

Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербург 2020

XVII век

- 1684: Лейбниц

  Первая публикация по дифференциальному исчислению.

  «Найти касательную — значит провести прямую, соедин. две точки кривой, расстояние между которыми бескон. мало».

- 1696: Лопиталь (в контакте с Бернулли ст.)

  Первый учебник мат. анализа: «Анализ бесконечно малых». В основе — научное наследие Лейбница и Ньютона.

  Лейбниц: «Бесконечно малое — количество, меньшее любого могущего быть заданным количества».

  Ньютон: «Бесконечно близкие — количества с исчезающей разностью, стремящиеся к равенству».

XVIII век

Постоянное, эффективное применение бесконечно малых.

Вместе с тем на протяжении многих лет и Эйлера, и Лагранжа критиковали за «неверное обоснование анализа».

1734: Теолог эпископ Беркли критиковал тогдашних аналитиков, соглашаясь с их выводами, но не с методами.

1759: Д'Аламбер: «Бесконечно малые на самом деле не существуют ни в природе, ни в допущениях геометров».

XIX век

Больцано, Коши, Вейерштрасс.

Обоснование анализа с помощью теории пределов.

Эти достижения изложены во всяком современном уч. анализа.

Больцано ввел новый канон строгости в анализе.

Коши: «Бесконечно малая — это функция с нулевым пределом»; однако в своём определении предела Коши использовал не ε-δ, а специальные «переменные количества».

Вейерштрассом была разработана *эпсилон-дельта техника*.

Начало XX века

Недоверие к идее (актуального) бесконечно малого усиливается переустройством математики на основе теории множеств.

1934: Лузин выражал противоречивые взгляды:

«Не отрицая форм. возможности определить идею постоянного беск. малого, современный анализ рассматривает эту идею как совершенно бесплодную, *так как ввести такое бесконечно малое в исчисление оказывается невозможным*».

«Имеются какие-то глубоко скрытые причины, ещё до сих пор не выясненные полностью, которые заставляют наш ум быть расположенным к актуальным бесконечно малым».

«Актуально [бесконечно] малые будут совершенно реабилитированы с полной научной точки зрения».

1961 год

Абрахам Робинсон публикует свой «Нестандартный анализ».

В этой книге даётся современное обоснование метода (актуальных) бесконечно малых. В основе — теоретико-модельный подход.

Здесь бесконечно малые суть актуальные математические объекты, но всё же отделённые от «обычных чисел» и живущие в специальном расширении «стандартной модели».

Замечание

В 1977 году публикуется статья

Nelson, E. Internal set theory: A new approach to nonstandard analysis. *Bull. Amer. Math. Soc.* 3:3, 11650–1198, 1977.

Под внутренней теорией множеств — сокращенно IST — понимается специальная теория в сигнатуре

$$\langle =^2, \in^2, \mathrm{St}^1 \rangle,$$

вдохновлённая подходом Робинсона. При этом IST оказывается *консервативным расширением* ZFC: для любого $\langle =, \in \rangle$-предложения Φ,

$$\mathrm{IST} \vdash \Phi \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{ZFC} \vdash \Phi.$$

Значит, можно свободно пользоваться «нестандартными множествами» из IST в ходе получения результатов об «обычных множествах» из ZFC. Это полностью легитимизирует беск. большие и малые.

Замечание

Ещё Лейбниц — чьими обозначениями dx и $\int$ мы пользуемся по сей день — предсказывал, что метод бесконечно малых будет полностью легитимизирован в будущем.

Кроме того, Лейбниц мечтал об универсальных языке и исчислении, с помощью которых можно решать разнообразные задачи, в связи с чем уместно упомянуть:

- сильно полные исчисления для логики первого порядка;
- универсальные машины Тьюринга (своего рода ОС);
- современные разработки систем автоматического поиска доказательств и proof-ассистентов.

Чтобы не размениваться на мелочи, зафиксируем «мегаломанскую сигнатуру» σ, где

$$\mathrm{Pred}_\sigma \; := \; \bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} \{\underline{P} \mid P \subseteq \mathbb{R}^n\},$$

$$\mathrm{Func}_\sigma \; := \; \bigcup_{m \in \mathbb{N}_+} \{\underline{f} \mid f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}\} \quad \text{и} \quad \mathrm{Const}_\sigma \; := \; \{\underline{c} \mid c \in \mathbb{R}\},$$

причём arity_σ задаётся естественным образом; будем считать, что

$$0, \quad 1, \quad +, \quad -, \quad \cdot, \quad |\cdot|, \quad < \quad \text{и} \quad =$$

содержатся в σ (или точнее, отождествляются с подходящими символами в σ). Обозначим σ-структуру с носителем $\mathbb{R}$, в которой все символы σ интерпретируются обычным образом, через $\mathfrak{R}$.

Действуя по аналогии с арифметикой, возьмём

$$\sigma' \;:=\; \sigma \cup \{c\},$$

где c — новый константый символ. Рассмотрим σ'-теорию

$$\Gamma \;:=\; \mathrm{Th}\,(\mathfrak{N}) \cup \{\underline{n} < c \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Легко видеть, что Γ локально выполнима. Значит, у Γ есть модель $\mathfrak{A}$; при этом мы можем считать, что $|A| \leqslant |\mathrm{Sent}_\sigma| = 2^{2^{\aleph_0}}$. Обозначим σ-обеднение $\mathfrak{A}$ через $\mathfrak{N}^\sharp$. Ясно, что:

- $\mathfrak{N}^\sharp$ является моделью $\mathrm{Th}\,(\mathfrak{N})$;
- $\lambda r.[\underline{r}^{\mathfrak{N}^\sharp}]$ вкладывает $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{N}^\sharp$ (ввиду замкнутости $\mathfrak{N}$).

В частности, $|A| = 2^{2^{\aleph_0}}$, т.е. $\mathfrak{N}^\sharp$ имеет мощность $2^{2^{\aleph_0}}$; однако для нас это обстоятельство несущественно.

Замечание

$\mathfrak{R}^\sharp$ и $\mathfrak{R}$ не изоморфны.

Доказательство замечания.

Пусть ξ — изоморфизм из $\mathfrak{R}$ на $\mathfrak{R}^\sharp$. Возьмём

$$\mathbf{r} \ := \ c^{\mathfrak{A}}$$

(см. выше). Тогда $\mathbf{r} = \xi(r)$ для некот. $r \in \mathbb{R}$. Существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $r \leqslant n$, т.е. $\mathfrak{R} \Vdash r \leqslant \underline{n}$. Отсюда $\mathfrak{R}^\sharp \Vdash \mathbf{r} \leqslant \underline{n}$ — противоречие. $\square$

Немного повозившись, в носителе $\mathfrak{R}^\sharp$ можно заменить каждое $\underline{r}^{\mathfrak{R}^\sharp}$ на r . Отныне будем считать, что $\underline{r}^{\mathfrak{R}^\sharp} = r$ для всех $r \in \mathbb{R}$.

Замечание

В $\mathfrak{R}^\sharp$ у ненулевых элементов есть обратные:

$$\mathfrak{R}^\sharp \Vdash \forall x\,(x \neq 0 \to \exists! y\; x \cdot y = 1).$$

Интуитивно **r** является бесконечно большим (относительно обычных натуральных, а значит, и вещественных чисел). Поэтому обратный к **r** оказывается ненулевым бесконечно малым. Кроме того, если архимедовость понимается как

«для всякого $x > 0$ найдётся $n \in \mathbb{N}$ такое, что $nx > 1$»,

то $\mathfrak{R}^\sharp$ как поле, разумеется, не является архимедовым.

Для удобства введём сокращения

$$P^\sharp \;:=\; \underline{P}^{\mathfrak{R}^\sharp} \quad \text{и} \quad f^\sharp \;:=\; \underline{f}^{\mathfrak{R}^\sharp},$$

где $\underline{P} \in \mathrm{Pred}_{\underline{\sigma}}$ и $\underline{f} \in \mathrm{Func}_{\underline{\sigma}}$. При этом мы считаем, что

$$+^\sharp \;:=\; +^{\mathfrak{R}^\sharp} \quad -^\sharp \;:=\; -^{\mathfrak{R}^\sharp} \quad \cdot^\sharp \;:=\; \times^{\mathfrak{R}^\sharp}$$

$$|\cdot|^\sharp \;:=\; |\cdot|^{\mathfrak{R}^\sharp} \quad \text{и} \quad <^\sharp \;:=\; <^{\mathfrak{R}^\sharp};$$

вместо $=^{\mathfrak{R}^\sharp}$ пишем $=$. С константами ничего не делаем, так как

$$\underline{r}^{\mathfrak{R}^\sharp} \;=\; r \quad \text{для каждого} \;\; r \in \mathbb{R}.$$

Элементы $\mathbb{R}^\sharp$ иногда называют гипервещественными числами; те из них, что лежат в $\mathbb{R}$, стандартны, а остальные — нестандартны.

Замечание

Множество $\mathbb{R}$ можно рассматривать как одноместный предикат на $\mathbb{R}$. Тогда, поскольку $\mathfrak{R} \Vdash \forall x\, \underline{\mathbb{R}}\,(x)$, мы имеем $\mathfrak{R}^\sharp \Vdash \forall x\, \underline{\mathbb{R}}\,(x)$, т.е.

$$\underbrace{\text{носитель } \mathfrak{R}^\sharp}_{A} = \underline{\mathbb{R}}^{\mathfrak{R}^\sharp} = \mathbb{R}^\sharp.$$

Хотя мы будем пользоваться свойствами, выразимыми посредством σ-предложений, тут нельзя использовать аналоги свойств вроде

«У всякого ограниченного $S \subseteq \mathbb{R}$ есть супремум».

На самом деле, его непосредственный аналог

«У всякого ограниченного $S \subseteq \mathbb{R}^\sharp$ есть супремум».

опровергается, поскольку можно взять $S := \mathbb{R}$. Тем не менее, для S, определимых в $\mathfrak{R}^\sharp$, этот принцип верен.

Замечание

Нетрудно убедиться, что для всех $P \subseteq \mathbb{R}^n$ и $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$,

$$P^\sharp \cap \mathbb{R}^n \;=\; P \quad \text{и} \quad f^\sharp \cap \mathbb{R}^{m+1} \;=\; f.$$

Действительно, для любого $(r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
(r_1, \ldots, r_n) \;\in\; P \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathfrak{R} \Vdash \underline{P}\left(\underline{r_1}, \ldots, \underline{r_n}\right) \\
&\Longleftrightarrow \quad \mathfrak{R}^\sharp \Vdash \underline{P}\left(\underline{r_1}, \ldots, \underline{r_n}\right) \\
&\Longleftrightarrow \quad (r_1, \ldots, r_n) \;\in\; P^\sharp,
\end{aligned}$$

и для любого $(r_1, \ldots, r_m, r_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1}$,

$$\begin{aligned}
f\,(r_1, \ldots, r_m) \;=\; r_{m+1} \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathfrak{R} \Vdash \underline{f}\left(\underline{r_1}, \ldots, \underline{r_m}\right) = \underline{r_{m+1}} \\
&\Longleftrightarrow \quad \mathfrak{R}^\sharp \Vdash \underline{f}\left(\underline{r_1}, \ldots, \underline{r_m}\right) = \underline{r_{m+1}} \\
&\Longleftrightarrow \quad f^\sharp\,(r_1, \ldots, r_m) \;=\; r_{m+1}.
\end{aligned}$$

Таким образом, P и f расширяются до $P^\sharp$ и $f^\sharp$ соответственно.

Инфинитезималы

Ключевые роли в дальнейшем будут играть

$$\mathbb{F} := \left\{a \in \mathbb{R}^\sharp \mid |a|^\sharp <^\sharp r \text{ для некоторого } r \in \mathbb{R}\right\} \quad \text{и}$$

$$\mathbb{I} := \left\{a \in \mathbb{R}^\sharp \mid |a|^\sharp <^\sharp r \text{ для всех положительных } r \in \mathbb{R}\right\}.$$

Элементы $\mathbb{F}$ называются конечными, а $\mathbb{I}$ — бесконечно малыми, или инфинитезималами. Очевидно, $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{F}$ и $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{F}$.

Разумеется, $\mathbb{I} \cap \mathbb{R} = \{0\}$. Кроме того, $\mathbb{R}^\sharp \setminus \mathbb{F} \neq \varnothing$ по построению, т.е. бесконечные элементы существуют, причём среди них есть как положительные, так и отрицательные.

Рассуждая *внутри* $\mathfrak{R}^\sharp$, из соображений наглядности мы будем часто писать $a < b$ вместо $a <^\sharp b$, $|a|$ вместо $|a|^\sharp$, и т.д.

В $\mathfrak{R}^\sharp$, как и в $\mathfrak{R}$, можно делить на ненулевые элементы:

$$\mathfrak{R}^\sharp \Vdash \forall x\, \forall y\, (y \neq 0 \to \exists! z\, x \cdot z = y).$$

Для любых $a \in \mathbb{R}^\sharp$ и $b \in \mathbb{R}^\sharp \setminus \{0\}$ обозначим через a/b единственное $c \in \mathbb{R}^\sharp$ такое, что

$$b \cdot c \;=\; a;$$

Легко убедиться, что $a/b \in \mathbb{R}$ для $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Предложение

Пусть $a \in \mathbb{R}^\sharp \setminus \mathbb{F}$. *Тогда* $1/a \in \mathbb{I}$.

Доказательство.

Пусть r — положительное вещественное число. По условию $|a| \not< 2/r$, т.е. $2/r \leqslant |a|$, откуда $|1/a| = 1/\,|a| \leqslant r/2 < r$. $\square$

Замечание

Пусть $S \subseteq \mathbb{R}$ неограничено (сверху). Тогда $\mathfrak{R} \Vdash \forall x \, \exists y \, (\underline{S}\,(y) \wedge x < y)$, а значит,

$$\mathfrak{R}^\sharp \Vdash \forall x \, \exists y \, (\underline{S}\,(y) \wedge x < y).$$

Стало быть, каждый (положительный) бесконечный элемент меньше какого-нибудь элемента $S^\sharp$. Следовательно,

$S^\sharp$ содержит бесконечные элементы.

В частности, бесконечные элементы найдутся в $\mathbb{N}^\sharp$ и $\mathbb{Q}^\sharp$. Более того, в $\mathbb{Q}^\sharp$ есть бесконечно малые.

Предложение

i. $\mathbb{F}$ *замкнуто относительно* $+^\sharp$, $-^\sharp$ *и* $\cdot^\sharp$.

ii. $\mathbb{I}$ *замкнуто относительно* $+^\sharp$ *и* $-^\sharp$. *Кроме того,*

$$a \cdot b \ \in \ \mathbb{I} \quad \textit{для всех} \ \ a \in \mathbb{I} \ \ \textit{и} \ \ b \in \mathbb{F}.$$

Доказательство.

$\boxed{\text{i.}}$ Пусть $a, b \in \mathbb{F}$, т.е. $|a| < r$ и $|b| < s$ для некоторых $r, s \in \mathbb{R}$. Тогда

$$|a \pm b| \ \leqslant \ |a| + |b| \ < \ r + s \quad \text{и} \quad |a \cdot b| \ \leqslant \ |a| \cdot |b| \ < \ r \cdot s.$$

Стало быть, $a \pm b \in \mathbb{F}$ и $a \cdot b \in \mathbb{F}$.

$\boxed{\text{ii.}}$ Пусть $a, b \in \mathbb{I}$. Для любого положительного $r \in \mathbb{R}$ верно $|a| < r/2$ и $|b| < r/2$, а потому $|a \pm b| < r/2 + r/2 = r$. Значит, $a \pm b \in \mathbb{I}$.

...

Доказательство (продолжение).

Наконец, пусть $a \in \mathbb{I}$ и $b \in \mathbb{F}$. Найдётся $s \in \mathbb{R}$ такое, что $|b| < s$. Для любого положительного $r \in \mathbb{R}$ верно $|a| < r/s$, а потому

$$|a \cdot b| \; < \; r/s \cdot s \; = \; r.$$

Значит, $a \cdot b \in \mathbb{I}$. □

Говорят, что a и b бесконечно близки, и пишут $a \approx b$, если $a - b \in \mathbb{I}$.

Предложение

$\approx$ *является отношением эквивалентности на* $\mathbb{R}^\sharp$. □

Замечание

Для любых $a, b \in \mathbb{R}^\sharp$:

i. если $a \approx b$ и $a \in \mathbb{F}$, то $b \in \mathbb{F}$.

ii. если $a \approx b$ и $a \in \mathbb{I}$, то $b \in \mathbb{I}$.

Далее, $\approx$ согласовано с $+^\sharp$, $-^\sharp$ и $\cdot^\sharp$ в определённом смысле:

Предложение

Для любых $a, b, c, d \in \mathbb{R}^\sharp$:

i. *если $a \approx b$ и $c \approx d$, то $a + c \approx b + d$ и $-a \approx -b$;*

ii. *если $a \approx b$ и $c \approx d$, причём $\{a, b, c, d\} \subseteq \mathbb{F}$, то $a \cdot c \approx b \cdot d$.*

Доказательство.

i. Пусть $a \approx b$ и $c \approx d$. Тогда

$$\begin{aligned} (a+c)-(b+d) &= (a-b)+(c-d) \in \mathbb{I} \\ \text{и} \quad (-a)-(-b) &= -(a-b) \in \mathbb{I}, \end{aligned}$$

т.е. $a+c \approx b+d$ и $-a \approx -b$.

ii. Пусть $a \approx b$ и $c \approx d$, причём $\{a,b,c,d\} \subseteq \mathbb{F}$. Тогда

$$\begin{aligned} (a \cdot c)-(b \cdot d) &= \\ (a \cdot c)+(a \cdot d)-(a \cdot d)-(b \cdot d) &= \\ a \cdot (c-d)-(a-b) \cdot d &\in \mathbb{I}, \end{aligned}$$

т.е. $a \cdot c \approx b \cdot d$. $\square$

Мы вскоре увидим, что всякое конечное число однозначно раскладывается в сумму стандартного и инфинитезимала, и это позволит нам при небходимости возвращаться в *стандартный мир*. Для получения данного результата полезной оказывается:

Лемма

Для любых $a, b \in \mathbb{F}$, *если* $a < b$ *и* $a \not\approx b$, *то найдётся* $r \in \mathbb{R}$ *такое, что* $a < r < b$.

Доказательство.

Пусть $a < b$ и $a \not\approx b$, причём a и b конечны. Рассмотрим

$$S_1 \;:=\; \{r \in \mathbb{R} \mid r \leqslant a\} \quad \text{и} \quad S_2 \;:=\; \{r \in \mathbb{R} \mid b \leqslant r\}.$$

Ввиду конечности a и b, S_1 и S_2 непусты и ограничены соответственно сверху и снизу. Положим

$$r_1 \;:=\; \sup S_1 \quad \text{и} \quad r_2 \;:=\; \inf S_2.$$

Тогда для любого положительного $s \in \mathbb{R}$ сущ. $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ такие, что

$$r_1 - s \;<\; s_1 \;\leqslant\; a \quad \text{и} \quad b \;\leqslant\; s_2 \;<\; r_2 + s.$$

Если $r_1 = r_2$, то $a \approx r_1$ и $b \approx r_1$, откуда $a \approx b$ — противоречие. Стало быть, $r_1 \neq r_2$, т.е. $r_1 < r_2$. Значит, можно взять $r := (r_1 + r_2)/2$. □

Теорема

Для каждого $a \in \mathbb{F}$ *существует единственное* $r \in \mathbb{R}$ *такое, что* $a \approx r$.

Доказательство.

$\boxed{\exists}$ Пусть $a \in \mathbb{F}$. Рассмотрим

$$S \;:=\; \{r \in \mathbb{R} \mid r \leqslant a\}.$$

Ввиду конечности a, S непусто и ограничено сверху. Положим

$$r \;:=\; \sup S.$$

Пусть $r \not\approx a$. В частности, $r \neq a$, т.е. $r < a$ или $a < r$.

...

Доказательство (продолжение).

- Пусть $r < a$. В силу леммы выше, найдётся $s \in \mathbb{R}$ такое, что

$$r \quad < \quad s \quad < \quad a.$$

  Очевидно, $s \in S$, а потому r не может быть верхней гранью S — противоречие.

- Пусть $a < r$. В силу леммы выше, найдётся $s \in \mathbb{R}$ такое, что

$$a \quad < \quad s \quad < \quad r.$$

  Тогда s — верхняя грань S, а потому r не является наименьшей из верхних граней S — противоречие.

В итоге $r \approx a$.

$\boxed{!}$ Пусть $r, r' \in \mathbb{R}$ таковы, что $r \approx a$ и $r' \approx a$. Тогда $r \approx r'$, откуда мы получаем $r = r'$, поскольку $\mathbb{I} \cap \mathbb{R} = \{0\}$. $\square$

Значит, всякое $a \in \mathbb{F}$ однозначно представляется в виде

$$r + \varepsilon,$$

где $r \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon \in \mathbb{I}$; при этом r называют стандартной частью a и обозначают $\mathrm{st}\,(a)$, или ${}^\circ a$. Очевидно, $\mathrm{st}\,(r) = r$ для всех $r \in \mathbb{R}$.

Предложение

i. st *является сюрьекцией из* $\mathbb{F}$ *на* $\mathbb{R}$.

ii. $\mathrm{st}^{-1}\,[\{0\}] = \mathbb{I}$, *т.е. для любого* $a \in \mathbb{F}$,

$$\mathrm{st}\,(a) \;=\; 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a \;\in\; \mathbb{I}.$$

iii. *для любых* $a, b \in \mathbb{F}$,

$$\mathrm{st}\,(a+b) \;=\; \mathrm{st}\,(a) + \mathrm{st}\,(b) \quad \textit{и} \quad \mathrm{st}\,(a \cdot b) \;=\; \mathrm{st}\,(a) \cdot \mathrm{st}\,(b).$$

Доказательство.

i. Очевидно.

ii. Пусть $a \in \mathbb{F}$. Ясно, что $a \in \mathbb{I}$ равносильно $a \approx 0$, т.е. $\mathrm{st}(a) = 0$.

iii. Пусть $a, b \in \mathbb{F}$. Поскольку $\mathrm{st}(a) \approx a$ и $\mathrm{st}(b) \approx b$, мы получаем

$$\mathrm{st}(a) + \mathrm{st}(b) \;\approx\; a + b \quad \text{и} \quad \mathrm{st}(a) \cdot \mathrm{st}(b) \;\approx\; a \cdot b.$$

(см. предыдущую лекцию, а именно, предложение о согласованности $\approx$ с $+^\sharp$, $-^\sharp$ и $\cdot^\sharp$). Стало быть,

$$\mathrm{st}(a + b) \;=\; \mathrm{st}(a) + \mathrm{st}(b) \quad \text{и} \quad \mathrm{st}(a \cdot b) \;=\; \mathrm{st}(a) \cdot \mathrm{st}(b).$$

$\square$

Замечание

Иными словами, st — это сюрьективный гомоморфизм кольца над $\mathbb{F}$ на поле над $\mathbb{R}$ с ядром $\mathbb{I}$; следовательно, фактор-колько $\mathbb{F}$ по $\mathbb{I}$ будет изоморфно полю $\mathbb{R}$.

Разумеется, в $\mathbb{R}^\sharp$ каждому $r \in \mathbb{R}$ соответствует

$$\begin{aligned}[r] &:= \left\{a \in \mathbb{R}^\sharp \mid a \approx r\right\} \\ &= \left\{a \in \mathbb{R}^\sharp \mid \mathrm{st}\,(a) = r\right\},\end{aligned}$$

своего рода монада r, состоящая из чисел вида

$$r + \varepsilon,$$

где $\varepsilon \in \mathbb{I}$. С помощью бесконечно близких можно развить, например, теорию предела (в духе Лейбница и Ньютона); понятия вроде «быть непрерывной в точке» при этом становятся более локальными.

Сходимость

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $r, s \in \mathbb{R}$. Будем говорить, что f сходится в r к s, если для любого $a \in \mathbb{R}^\sharp \setminus \{r\}$ из $a \approx r$ следует $f^\sharp(a) \approx s$.

Предложение

Для любых $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $r, s \in \mathbb{R}$ следующие условия эквивалентны:

i. *f сходится в r к s в смысле эпсилон-дельта определения;*

ii. *f сходится в r к s в смысле определения выше.*

Доказательство.

$\boxed{\text{i.} \Longrightarrow \text{ii.}}$ Пусть (i). Предположим, что $a \in \mathbb{R}^\sharp \setminus \{r\}$ и $r \approx a$. Рассмотрим произвольное положительное $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Существует положительное $\delta \in \mathbb{R}$ такое, что

$$\mathfrak{R} \Vdash \forall x \, (0 \neq |x - \underline{r}| < \underline{\delta} \to |\underline{f}\,(x) - \underline{s}| < \underline{\varepsilon}).$$

То же самое будет истинно и в $\mathfrak{R}^\sharp$. Очевидно, $0 \neq |a - r| < \delta$, откуда $\left|f^\sharp\,(a) - s\right| < \varepsilon$. В силу произвольности ε, мы получаем $f^\sharp\,(a) - s \in \mathbb{I}$, т.е. $f^\sharp\,(a) \approx s$.

...

Доказательство (продолжение).

ii. $\Longrightarrow$ i. Пусть (ii). Тогда для каждого положительного $\varepsilon \in \mathbb{R}$,

$$\mathfrak{R}^\sharp \Vdash \exists y\,(0 < y \wedge \forall u\,(0 \neq |u - \underline{r}| < y \to |\underline{f}\,(u) - \underline{s}| < \underline{\varepsilon})),$$

так как в качестве y мы можем взять произвольный положительный инфинитезимал. То же самое будет истинно и в $\mathfrak{R}$. □

Замечание

Разумеется, может случиться так, что $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ не сходится в $r \in \mathbb{R}$ ни к какому $s \in \mathbb{R}$. С другой стороны, если f сходится в r к какому-н. s, то соответствующее s определяется однозначно равенством

$$s = \mathrm{st}\left(f^\sharp\,(r + \varepsilon)\right),$$

где ε — произвольный ненулевой инфинитезимал; это s традиционно обозначают как $\lim_{x \to r} f\,(x)$.

Замечание

Требование $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$ является излишним. Для частичных функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ достаточно было бы потребовать следующего:

найдётся $a \in (\operatorname{dom} f)^\sharp$ такое, что $a \approx r$ и $a \neq r$.

Тем не менее, для наглядности мы ограничимся рассмотрением всюду определенных функций.

Следствие (о непрерывности в точке)

Для любых $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $r \in \mathbb{R}$ следующие условия эквивалентны:

i. *f непрерывна в r в стандартном смысле;*

ii. *для любого $a \in \mathbb{R}^\sharp$, если $a \approx r$, то $f^\sharp(a) \approx f(r)$.*

(Можно ещё переписать (ii) как «f сходится в r к $f(r)$».) □

Пример применения: производные

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $r \in \mathbb{R}$. Под производной f в r понимается

$$f'(r) \;:=\; \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

если этот предел существует. Значит, $f'(r) = s$ тогда и только тогда, когда для всякого ненулевого инфинитезимала dx,

$$\frac{f^{\sharp}(r+dx) - f(r)}{dx} \;\approx\; s,$$

где для числителя дроби в левой части нередко используют обозначение df. В частности, если $f'(r)$ существует, то

$$f'(r) \;=\; \operatorname{st}(df/dx),$$

где dx — произвольный ненулевой инфинитезимал, причём df/dx — это результат непосредственно *деления*, а не предел.

Пример

Рассмотрим $f := \lambda x.\left[x^2\right]$. Пусть $r \in \mathbb{R}$. Тогда для всякого ненулевого инфинитезимала dx,

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= \frac{(r+dx)^2 - r^2}{dx} = \frac{r^2 + 2r\,(dx) + (dx)^2 - r^2}{dx} \\ &= \frac{2r\,(dx) + (dx)^2}{dx} = 2r + dx \approx 2r. \end{aligned}$$

Стало быть, $f'(r) = 2r$.

Предложение

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}$ *и* $f'(r)$ *существует. Тогда* f *непрерывна в* r.

Доказательство.

Рассмотрим произв. ненулевой инфинитезимал dx. По условию

$$\frac{f^\sharp(r + dx) - f(r)}{dx} \approx f'(r).$$

Очевидно, в правой части стоит стандартное число; поэтому в левой — как минимум конечное. Домножив обе части на dx, получим

$$f^\sharp(r + dx) - f(r) \approx f'(r) \cdot dx \in \mathbb{I}.$$

Стало быть, $f^\sharp(r + dx) \approx f(r)$. □

Отметим, что это не нестандартный аналог классической теоремы, а классическая теорема, но с «нестандартным доказательством».

Предложение

Пусть $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *и* $r \in \mathbb{R}$ *таковы, что* $f'(r)$ *и* $g'(f(r))$ *существуют. Тогда* $(f \circ g)'(r)$ *существует и равно* $g'(f(r)) \cdot f'(r)$.

Доказательство.

Первым делом заметим, что $(f \circ g)^\sharp = f^\sharp \circ g^\sharp$, поскольку

$$\mathfrak{R}^\sharp \Vdash \forall x\, \underline{(f \circ g)}\,(x) \;=\; \underline{g}\,(\underline{f}\,(x)).$$

Рассмотрим произвольный ненулевой инфинитезимал dx. Положим

$$\begin{aligned} df &:= f^\sharp(r + dx) - f(r) \\ d(f \circ g) &:= (f \circ g)^\sharp(r + dx) - (f \circ g)(r) \\ &= g^\sharp\left(f^\sharp(r + dx)\right) - g(f(r)) \\ &= g^\sharp(f(r) + df) - g(f(r)). \end{aligned}$$

Как мы уже знаем, f непрерывна в r; поэтому df — инфинитезимал.

...

Доказательство (продолжение).

Нужно показать, что

$$\frac{d\,(f \circ g)}{dx} \approx g'\,(f\,(r)) \cdot f'\,(r).$$

Возможны два случая.

- Пусть $df = 0$. Тогда $d\,(f \circ g) = 0$; кроме того, $f'\,(r) \approx df/dx = 0$, а значит, $f'\,(r) = 0$. В итоге

$$\frac{d\,(f \circ g)}{dx} = 0 = g'\,(f\,(r)) \cdot f'\,(r).$$

...

Доказательство (продолжение).

- Пусть $df \neq 0$. Тогда

$$\frac{d\,(f \circ g)}{df} = \frac{g^{\sharp}\,(f\,(r) + df) - g\,(f\,(r))}{df} \approx g'\,(f\,(r)).$$

Стало быть,

$$\frac{d\,(f \circ g)}{dx} = \frac{d\,(f \circ g)}{df} \cdot \frac{df}{dx} \approx g'\,(f\,(r)) \cdot f'\,(r).$$

$\square$

Заключительные комментарии

- Выше приведено лишь несколько простейших примеров применения метода бесконечно малых.
- На самом деле, применения бесконечно малых выходят далеко за пределы *элементарного анализа*. К примеру, метод успешно использовался в функциональном анализе и теории меры.
- Многие результаты математического анализа изначально были получены с помощью бесконечно малых, хотя, разумеется, сам метод в те времена был куда менее обоснован.