

Математическая логика (продолжение): 1

/* краткий экскурс в FOCL */

Станислав Олегович Сперанский

Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербург 2020

Под **сигнатурой** понимают четвёрку вида

$$\sigma = \langle \text{Const}_\sigma, \text{Func}_\sigma, \text{Pred}_\sigma, \text{arity}_\sigma \rangle,$$

где Const_σ , Func_σ , Pred_σ — попарно непересекающиеся множества, а arity_σ — функция из $\text{Func}_\sigma \cup \text{Pred}_\sigma$ в $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Элементы Const_σ , Func_σ и Pred_σ называются соответственно **константными**, **функциональными** и **предикатными символами** σ .

Для данного символа $\varepsilon \in \text{Func}_\sigma \cup \text{Pred}_\sigma$ число $\text{arity}_\sigma(\varepsilon)$ называют **местностью** ε , или **арностью** ε , или **его валентностью**.

Когда из контекста ясно, о какой сигнатуре σ идёт речь, индекс \cdot_σ может, разумеется, опускаться.

В дальнейшем при записи сигнатур нами будет допускаться определённая свобода. Так, если

$$\text{Const}_\sigma = \{c_1, \dots, c_i\},$$
$$\text{Func}_\sigma = \{f_1, \dots, f_j\} \text{ и } \text{Pred}_\sigma = \{P_1, \dots, P_k\},$$

то σ удобно представить как

$$\langle c_1, \dots, c_i; f_1^{n_1}, \dots, f_j^{n_j}; P_1^{m_1}, \dots, P_k^{m_k} \rangle,$$

где n_1, \dots, n_j и m_1, \dots, m_k — местности соответственно f_1, \dots, f_j и P_1, \dots, P_k .

Пример

Сигнатурой упорядоченных колец является $\langle 0, 1; +^2, -^1, \cdot^2; <^2, =^2 \rangle$.

Под σ -структурой понимают пару вида

$$\mathfrak{A} = \langle A, I_{\mathfrak{A}} \rangle,$$

где A — непустое множество, а $I_{\mathfrak{A}}$ — функция с областью определения $\text{Const}_{\sigma} \cup \text{Func}_{\sigma} \cup \text{Pred}_{\sigma}$ такая, что:

- ▶ для любого $c \in \text{Const}_{\sigma}$ верно $I_{\mathfrak{A}}(c) \in A$;
- ▶ для любого n -местного $f \in \text{Func}_{\sigma}$ верно $I_{\mathfrak{A}}(f) : A^n \rightarrow A$;
- ▶ для любого m -местного $P \in \text{Pred}_{\sigma}$ верно $I_{\mathfrak{A}}(P) \subseteq A^m$.

При этом A называется носителем \mathfrak{A} , или универсумом \mathfrak{A} , а $I_{\mathfrak{A}}$ — интерпретацией для σ в \mathfrak{A} . Для наглядности вместо $I_{\mathfrak{A}}(c)$, $I_{\mathfrak{A}}(f)$ и $I_{\mathfrak{A}}(P)$ пишут $c^{\mathfrak{A}}$, $f^{\mathfrak{A}}$ и $P^{\mathfrak{A}}$ соответственно.

Кроме того, если σ представляется как

$$\langle c_1, \dots, c_i; f_1^{n_1}, \dots, f_j^{n_j}; P_1^{m_1}, \dots, P_i^{m_k} \rangle,$$

то \mathfrak{A} удобно представить как

$$\langle A; c_1^{\mathfrak{A}}, \dots, c_i^{\mathfrak{A}}; f_1^{\mathfrak{A}}, \dots, f_j^{\mathfrak{A}}; P_1^{\mathfrak{A}}, \dots, P_k^{\mathfrak{A}} \rangle.$$

Более того, для некоторых *стандартных* структур \mathfrak{A} даже индекс $^{\mathfrak{A}}$ может опускаться, хоть это и чревато некоторой путаницей.

Замечание

Отныне будет предполагаться, что **все рассматриваемые структуры нормальны**, т.е. = всегда интерпретируется обычным образом.

Раз и навсегда зафиксируем какое-нибудь счётное множество

$$\text{Var} := \{v_0, v_1, v_2, \dots\}.$$

Элементы Var мы будем называть **предметными переменными**, или просто **переменными**; в метаязыке их роль будут играть x, y, z, \dots (возможно, с индексами).

Пусть σ — произв. сигнатура. Язык \mathcal{L}_σ кл. логики первого порядка над σ состоит из эл-ов $\text{Var} \cup \text{Const}_\sigma \cup \text{Func}_\sigma \cup \text{Pred}_\sigma$, а также:

- ▶ $\rightarrow, \wedge, \vee$ и \neg (символы связок);
- ▶ \forall и \exists (символы кванторов);
- ▶ $(,)$ и $,$ (вспомогательные символы).

Для каждой $x \in \text{Var}$ слова $\forall x$ и $\exists x$ называют **кванторами по x** .

Обозначим через Term_σ наим. множество слов в алфавите \mathcal{L}_σ , замкнутое относительно следующих порождающих правил:

- ▶ если $x \in \text{Var}$, то $x \in \text{Term}_\sigma$;
- ▶ если $c \in \text{Const}_\sigma$, то $c \in \text{Term}_\sigma$;
- ▶ если $f \in \text{Func}_\sigma$, $\text{arity}_\sigma(f) = n$ и $\{t_1, \dots, t_n\} \subseteq \text{Term}_\sigma$, то

$$f(t_1, \dots, t_n) \in \text{Term}_\sigma.$$

Элементы Term_σ называют σ -термами.

Пример

Пусть σ — сигнатура колец. Тогда

$$\cdot (+ (x, 0), + (x, 1))$$

является σ -термом, который удобнее записать как $(x + 0) \cdot (x + 1)$.

Обозначим через Form_σ наим. множество слов в алфавите \mathcal{L}_σ , замкнутое относительно следующих порождающих правил:

- ▶ если $P \in \text{Pred}_\sigma$, $\text{arity}_\sigma(P) = n$ и $\{t_1, \dots, t_n\} \subseteq \text{Term}_\sigma$, то

$$P(t_1, \dots, t_n) \in \text{Form}_\sigma;$$

- ▶ если $\{\Phi, \Psi\} \subseteq \text{Form}_\sigma$, то

$$\{(\Phi \rightarrow \Psi), (\Phi \wedge \Psi), (\Phi \vee \Psi), \neg\Phi\} \subseteq \text{Form}_\sigma;$$

- ▶ если $\Phi \in \text{Form}_\sigma$ и $x \in \text{Var}$, то

$$\{\forall x \Phi, \exists x \Phi\} \subseteq \text{Form}_\sigma.$$

Элементы Form_σ называют σ -формулами.

Под **атомарными σ -формулами**, или **σ -атомами**, понимаются те, что не содержат ни символов связок, ни символов кванторов.

Связанные и свободные переменные

Пусть $\Phi \in \text{Form}_\sigma$, $x \in \text{Var}$ и $Q \in \{\forall, \exists\}$.

Каждое вхождение Qx в Φ является началом вхождения некоторой подформулы, причём последнее определяется однозначно; его называют **областью действия** данного вхождения Qx .

Вхождение x в Φ называется **связанным**, если оно входит в область действия какого-нибудь вхождения $\forall x$ или $\exists x$, и **свободным** иначе.

Далее, говорят, что x является **свободной переменной в Φ** , если у x есть хотя бы одно свободное вхождение в Φ .

Для удобства введём обозначение

$$FV(\Phi) := \left\{ z \in \text{Var} \mid \begin{array}{l} \text{у } z \text{ имеется хотя бы одно} \\ \text{свободное вхождение в } \Phi \end{array} \right\}.$$

Интуитивно элементы $FV(\Phi)$ играют роль **параметров** для Φ . Запись $\Phi(x_1, \dots, x_\ell)$ указывает на то, что $FV(\Phi) \subseteq \{x_1, \dots, x_\ell\}$.

Наконец, обозначим

$$\text{Sent}_\sigma := \{ \Phi \in \text{Form}_\sigma \mid FV(\Phi) = \emptyset \}$$

Элементы Sent_σ называют **σ -предложениями**, реже — **замкнутыми σ -формулами**. Они могут выступать в качестве **нелог. аксиом**.

Замечание

Можно провести аналогию между кванторами и операторами суммирования, интегрирования и т.д. Так, в выражении

$$\int_0^x y \cdot z \, dy$$

оба вхождения y связаны; вместо них нельзя подставить конкретные числа. Вместе с тем x и z свободны и фактически играют роль параметров. Далее, в выражении

$$2y + \int_0^x y \cdot z \, dy$$

первое вхождение y является свободным, а другие два — нет. Интуитивно данное выражение равносильно

$$2y + \int_0^x u \cdot z \, du.$$

Семантика для кл. логики первого порядка

Под **означиваниями переменных** в \mathfrak{A} , или просто **означиваниями** в \mathfrak{A} , понимаются функции из Var в A . Каждое означивание ν в \mathfrak{A} можно расширить до $\bar{\nu} : \text{Term}_\sigma \rightarrow A$ естественным образом:

$$\bar{\nu}(x) := \nu(x);$$

$$\bar{\nu}(c) := c^{\mathfrak{A}};$$

$$\bar{\nu}(f(t_1, \dots, t_n)) := f^{\mathfrak{A}}(\bar{\nu}(t_1), \dots, \bar{\nu}(t_n)).$$

В дальнейшем для любых $x \in \text{Var}$ и $a \in A$ через ν_a^x будет обозначаться означивание, получающееся из ν по правилу

$$\nu_a^x(y) := \begin{cases} \nu(y) & \text{если } y \neq x, \\ a & \text{если } y = x. \end{cases}$$

Определим $\mathfrak{A} \models \Phi [\nu]$ (читается как: Φ истинно в \mathfrak{A} при ν) индукцией по построению Φ :

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \models P(t_1, \dots, t_n) [\nu] &\iff (\bar{\nu}(t_1), \dots, \bar{\nu}(t_n)) \in P^{\mathfrak{A}}; \\ \mathfrak{A} \models \Psi \wedge \Theta [\nu] &\iff \mathfrak{A} \models \Psi [\nu] \text{ и } \mathfrak{A} \models \Theta [\nu]; \\ \mathfrak{A} \models \Psi \vee \Theta [\nu] &\iff \mathfrak{A} \models \Psi [\nu] \text{ или } \mathfrak{A} \models \Theta [\nu]; \\ \mathfrak{A} \models \neg \Psi [\nu] &\iff \mathfrak{A} \not\models \Psi [\nu]; \\ \mathfrak{A} \models \Psi \rightarrow \Theta [\nu] &\iff \mathfrak{A} \not\models \Psi [\nu] \text{ или } \mathfrak{A} \models \Theta [\nu]; \\ \mathfrak{A} \models \exists x \Psi [\nu] &\iff \mathfrak{A} \models \Psi [\nu_a^x] \text{ для некоторого } a \in A; \\ \mathfrak{A} \models \forall x \Psi [\nu] &\iff \mathfrak{A} \models \Psi [\nu_a^x] \text{ для всех } a \in A. \end{aligned}$$

Стоит отметить, что (не)верность $\mathfrak{A} \models \Phi [\nu]$ не зависит от того, какие значения ν сопоставляет элементам $\text{Var} \setminus \text{FV}(\Phi)$.

Если Φ имеет вид $\Phi(x_1, \dots, x_\ell)$, т.е. $FV(\Phi) \subseteq \{x_1, \dots, x_\ell\}$, то вместо $\mathfrak{A} \models \Phi[\nu]$ нередко пишут

$$\mathfrak{A} \models \Phi[x_1/\nu(x_1), \dots, x_\ell/\nu(x_\ell)],$$

или же $\mathfrak{A} \models \Phi[\nu(x_1), \dots, \nu(x_\ell)]$. В частности, для $\Phi \in \text{Sent}_\sigma$ обычно используется запись $\mathfrak{A} \models \Phi$.

Наконец, пусть $\Gamma \subseteq \text{Sent}_\sigma$. Говорят, что \mathfrak{A} является моделью Γ , и пишут $\mathfrak{A} \models \Gamma$, если $\mathfrak{A} \models \Phi$ для всех $\Phi \in \Gamma$.

Пример

Пусть \mathfrak{A} — кольцо. Если $\mathfrak{A} \models \forall x \forall y (x \cdot y = y \cdot x)$, то \mathfrak{A} коммутативно; если $\mathfrak{A} \models \forall y (x \cdot y = y \cdot x)[\nu]$, то $\nu(x)$ коммутирует со всеми эл-ми.

Выполнимость и общезначимость

σ -Формулу Φ называют:

- ▶ **выполнимой**, если $\mathfrak{A} \models \Phi [\nu]$ для некоторых \mathfrak{A} и ν ;
- ▶ **общезначимой**, если $\mathfrak{A} \models \Phi [\nu]$ для всех \mathfrak{A} и ν .

Здесь подразумевается, что \mathfrak{A} бегаёт по σ -структурам, тогда как ν — по означиваниям в \mathfrak{A} . Очевидно,

$$\Phi \text{ общезначима} \iff \neg\Phi \text{ не выполнима.}$$

Теорема (Чёрча; на 5ый семестр)

Проблема выполнимости для кл. логики первого порядка в сигнатуре арифметики алгоритмически неразрешима.

Пусть $\Gamma \subseteq \text{Sent}_\sigma$ и $\Phi \in \text{Form}_\sigma$. Говорят, что Φ семантически следует из Γ , и пишут $\Gamma \models \Phi$, если для любой \mathfrak{A} ,

$$\mathfrak{A} \models \Gamma \implies \mathfrak{A} \models \tilde{\forall}\Phi.$$

Вместо $\emptyset \models \Phi$ обычно пишут $\models \Phi$. Очевидно,

$$\models \Phi \iff \Phi \text{ общезначима.}$$

Наконец, формулы Φ и Ψ называют семантически эквивалентными, если $\models \Phi \leftrightarrow \Psi$; при этом пишут $\Phi \equiv \Psi$.

Выводимость в кл. логики первого порядка

Для $\Gamma \subseteq \text{Sent}_\sigma$ и $\Phi \in \text{Form}_\sigma$ запись $\Gamma \vdash \Phi$ означает, что сущ. вывод из Γ с заключением Φ . Вместо $\emptyset \vdash \Phi$ обычно пишут $\vdash \Phi$.

Замечание

Под **выводом** здесь понимается вывод в **гильбертовском исчислении** для кл. логики первого порядка (см. 2ой семестр); однако существуют и другие, порой куда более удобные типы исчислений.

Говорят, что: Φ **опровержима в Γ** , если $\Gamma \vdash \neg\Phi$; Φ **независима от Γ** , если $\Gamma \not\vdash \Phi$ и $\Gamma \not\vdash \neg\Phi$. Так, Коэн и Гёдель доказали, что:

- ▶ С независима от ZF, а CH — от ZFC;
- ▶ в частности, $\neg C$ не опровержима в ZF, а $\neg CH$ — в ZFC.

Теорема о сильной полноте \vdash (см. 2ой семестр)

Для любых $\Gamma \subseteq \text{Sent}_\sigma$ и $\Phi \in \text{Form}_\sigma$,

$$\Gamma \vdash \Phi \iff \Gamma \vDash \Phi.$$

Пример

Пусть Γ — множество всех аксиом теории колец. Тогда $\Gamma \vdash \Phi$ равносильно тому, что Φ истинно во всех кольцах при всех означиваниях.