Математическая логика: 4

Станислав Олегович Сперанский

Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербург 2020

Порядок на рациональных числах

Возьмём $\langle <^2, =^2 \rangle$ в качестве σ.

Обозначим через $\mathfrak{Q}$ стандартную σ-структуру с носителем $\mathbb{Q}$.

Теорема

$\mathrm{Th}\,(\mathfrak{Q})$ *допускает эффективную элиминацию кванторов.*

Доказательство.

Начнём с частного, но принципиального случая. Пусть $\Omega_0, \ldots, \Omega_n$ — атомарные σ-формулы, а x — переменная. Возьмём

$$\Theta \;:=\; \Omega_0 \wedge \cdots \wedge \Omega_n.$$

Давайте эффективно построим $\Theta_{\exists x} \in \mathrm{Form}^{\circ}_{\sigma}$ такую, что

$$\mathrm{Th}\,(\mathfrak{Q}) \vdash \exists x\, \Theta \leftrightarrow \Theta_{\exists x} \quad \text{и} \quad \mathrm{FV}\,(\Theta_{\exists x}) \;\subseteq\; \mathrm{FV}\,(\exists x\, \Theta).$$

...

Доказательство (продолжение).

Заметим, что для любого $i \in \{0, \dots, n\}$:

- если Ω_i не содержит x, то

$$\vdash \exists x\, \Theta \leftrightarrow (\Omega_i \wedge \exists x\, (\Omega_0 \wedge \dots \wedge \Omega_{i-1} \wedge \Omega_{i+1} \wedge \dots \wedge \Omega_n));$$

- если Ω_i совпадает с $x < x$, то

$$\mathrm{Th}\,(\mathfrak{Q}) \vdash \exists x\, \Theta \leftrightarrow \bot.$$

- если Ω_i совпадает с $x = x$, причём $n > 0$, то

$$\vdash \exists x\, \Theta \leftrightarrow \exists x\, (\Omega_0 \wedge \dots \wedge \Omega_{i-1} \wedge \Omega_{i+1} \wedge \dots \wedge \Omega_n).$$

- если Ω_i совпадает с $x = x$, причём $n = 0$, т.е. Θ совп. с $x = x$, то

$$\vdash \exists x\, \Theta \leftrightarrow \top.$$

...

Доказательство (продолжение).

Поэтому, не ограничивая общности, мы можем считать, что:

a. x входит в каждую из $\Omega_0, \ldots, \Omega_n$;

b. ни $x = x$, ни $x < x$ не встречается среди $\Omega_0, \ldots, \Omega_n$.

Теперь избавиться от квантора в $\exists x\, \Theta$ можно следующим образом.

- Если одно из $\Omega_0, \ldots, \Omega_n$ имеет вид $x = y$, где $y \in \mathrm{Var} \setminus \{x\}$, то

$$\vdash \exists x\, \Theta \leftrightarrow \Theta\,(x/y).$$

- Если Θ имеет вид $\bigwedge_{i=0}^{n} u_i < x$, где $\{u_0, \ldots, u_n\} \subseteq \mathrm{Var} \setminus \{x\}$, то

$$\mathrm{Th}\,(\mathfrak{Q}) \vdash \exists x\, \Theta \leftrightarrow \top.$$

  Аналогично для $\bigwedge_{i=0}^{n} x < u_i$.

...

Доказательство (продолжение).

- Если Θ (с точностью до порядка конъюнктов) имеет вид

$$\left(\bigwedge\nolimits_{i=0}^{k} u_i < x\right) \wedge \left(\bigwedge\nolimits_{j=0}^{l} x < v_j\right),$$

где $\{u_0, \ldots, u_k, v_0, \ldots, v_l\} \subseteq \mathrm{Var} \setminus \{x\}$, то

$$\mathrm{Th}\,(\mathfrak{Q}) \vdash \exists x\,\Theta \leftrightarrow \left(\bigwedge\nolimits_{i=0}^{m} \bigwedge\nolimits_{j=0}^{l} u_i < v_j\right).$$

В конце мы получим искомую бескванторную формулу $\Theta_{\exists x}$, которая эквивалентна $\exists x\,\Theta$ по модулю $\mathrm{Th}\,(\mathfrak{Q})$.

...

Доказательство (продолжение).

Переходя к общему случаю, рассмотрим σ-формулу

$$\Phi = \exists x\, \Psi(x, \vec{y}),$$

где $\Psi \in \mathrm{Form}_\sigma^\circ$. Нужно построить $\rho(\Phi) \in \mathrm{Form}_\sigma^\circ$ такую, что

$$\mathrm{Th}(\mathfrak{Q}) \vdash \Phi \leftrightarrow \rho(\Phi) \quad \text{и} \quad \mathrm{FV}(\rho(\Phi)) \subseteq \mathrm{FV}(\Phi).$$

Мы действуем следующим образом.

i. С помощью законов де Моргана и снятия двойного отрицания проносим $\neg$ внутрь $\Psi(x, \vec{y})$, чтобы $\neg$ стояло только перед атомарными подформулами.

...

Доказательство (продолжение).

ii. Избавляемся от $\neg$ (перед атом. подформулами), используя

$$\mathrm{Th}\,(\mathfrak{Q}) \vdash \neg x < y \leftrightarrow (x = y \vee y < x),$$
$$\mathrm{Th}\,(\mathfrak{Q}) \vdash \neg x = y \leftrightarrow (x < y \vee y < x).$$

iii. Применяя законы дистрибутивности, получаем

$$\Theta_0 \vee \cdots \vee \Theta_n,$$

где $\Theta_0, \ldots, \Theta_n$ суть конъюнкции атомарных формул; при этом, как известно,

$$\vdash \exists x\,(\Theta_0 \vee \cdots \vee \Theta_n) \leftrightarrow \exists x\,\Theta_0 \vee \cdots \vee \exists x\,\Theta_n.$$

Описанный ранее алгоритм позволяет избавиться от кванторов в $\exists x\,\Theta_0, \ldots, \exists x\,\Theta_n$. В итоге получится $\rho\,(\Phi)$.

Наконец, из ρ можно сделать желаемую τ. $\square$

Обозначим через DLO конъюнкцию следующих σ-предложений:

- $\forall x\, x \nless x$;
- $\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x < y \wedge y < z \to x < z)$;
- $\forall x\, \forall y\, (x \neq y \to x < y \vee y < x)$;
- $\forall x\, \forall y\, (x < y \to \exists u\, (x < u < y))$.
- $\forall x\, \exists y\, (y < x)$;
- $\forall x\, \exists y\, (x < y)$.

Очевидно, $\mathrm{Mod}\,(\mathrm{DLO})$ — это класс всех плотных (строгих) линейных порядков без концов, или п.л.п. без концов.

Следствие

$\mathrm{Th}(\mathfrak{Q}) = [\mathrm{DLO}]$.

Доказательство.

Нетрудно проверить, что в приведённом выше доказательстве

$$\text{«}\mathrm{Th}(\mathfrak{Q}) \vdash\text{» всюду можно заменить на «}\mathrm{DLO} \vdash\text{»}.$$

Стало быть, функция τ реализует элиминацию кванторов и в $\mathrm{Th}(\mathfrak{Q})$, и в DLO. В частности, для всякого $\Phi \in \mathrm{Sent}_\sigma$:

$$\begin{aligned} \mathrm{DLO} \vdash \Phi &\iff \mathrm{DLO} \vdash \tau(\Phi); \\ \mathrm{Th}(\mathfrak{Q}) \vdash \Phi &\iff \mathrm{Th}(\mathfrak{Q}) \vdash \tau(\Phi). \end{aligned}$$

...

Доказательство (продолжение).

Поэтому достаточно показать, что для всех бескв. σ-предложений Ψ,

$$\mathrm{DLO} \vdash \Psi \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Th}(\mathfrak{Q}) \vdash \Psi,$$

т.е. $[\mathrm{DLO}] \cap \mathrm{Form}_\sigma^\circ = \mathrm{Th}(\mathfrak{Q}) \cap \mathrm{Form}_\sigma^\circ$.

Пусть Ψ — бескванторное σ-предложение. Ясно, что Ψ представляет собой булеву комбинацию $\perp$ и $\top$, так как $\mathrm{Const}_\sigma = \varnothing$. Поэтому либо $\vDash \Psi$, либо $\vDash \neg\Psi$.

- Если $\vDash \Psi$, то $\vdash \Psi$, а потому $\mathrm{DLO} \vdash \Psi$ и $\mathrm{Th}(\mathfrak{Q}) \vdash \Phi$.
- Если $\vDash \neg\Psi$, то $\mathrm{DLO} \nvdash \Psi$ и $\mathrm{Th}(\mathfrak{Q}) \nvdash \Phi$, поскольку DLO и $\mathrm{Th}(\mathfrak{Q})$ выполнимы.

$\square$

Альтернативное рассуждение.

Для каждого σ-предложения Φ,

$$\begin{aligned} \mathrm{DLO} \vdash \Phi \quad & \Longleftrightarrow \quad \Phi \text{ истинно во всех п.л.п. без концов} \\ & \Longleftrightarrow \quad \Phi \text{ истинно во всех счётных п.л.п. без концов} \\ & \Longleftrightarrow \quad \Phi \text{ истинно в } \mathfrak{Q}. \end{aligned}$$

Тут последняя эквивалентность обусловлена тем, что, как мы знаем, любой счётный п.л.п. без концов изоморфен $\mathfrak{Q}$. Этот факт ещё формулируют так: DLO категорична в мощности $\aleph_0$.

Следствие

$\mathrm{Th}(\mathfrak{Q})$ *разрешимо.*

Доказательство.

Достаточно заметить, что $\mathrm{Th}(\mathfrak{Q}) \cap \mathrm{Form}^{\circ}_{\sigma}$ разрешимо. $\square$

Альтернативное рассуждение.

Так как $\mathrm{Th}(\mathfrak{Q}) = [\mathrm{DLO}]$, $\mathrm{Th}(\mathfrak{Q})$ перечислимо, а значит, и разрешимо (ввиду своей полноты).

Более того, элиминация кванторов позволяет получать явные оценки на временную/ёмкостную сложность разрешающей процедуры, тогда как альтернативный подход такой возможности не даёт.

Следствие

Пусть $S \subseteq \mathbb{Q}$ определимо в $\mathfrak{Q}$. Тогда $S = \varnothing$ или $S = \mathbb{Q}$.

Доказательство.

Пусть $\Phi(x)$ определяет S в $\mathfrak{Q}$. Тогда $\tau(\Phi(x))$ также определяет S в $\mathfrak{Q}$. Однако $\tau(\Phi(x))$ представляет собой булеву комбинацию формул видов $x = x$ и $x < x$. Стало быть,

$$\text{либо } \mathfrak{Q} \Vdash \forall x\, \tau(\Phi(x)), \quad \text{либо } \mathfrak{Q} \Vdash \forall x\, \neg\tau(\Phi(x)).$$

$\square$

Альтернативное рассуждение.

Как мы знаем, определимые в $\mathfrak{Q}$ множества замкнуты относительно автоморфизмов $\mathfrak{Q}$. Очевидно, для любых $p, q \in \mathbb{Q}$ «сдвиг на $q - p$» переводит p в q и лежит в $\mathrm{Aut}(\mathfrak{Q})$. Поэтому, если $S \subseteq \mathbb{Q}$ замк. относительно автоморфизмов $\mathfrak{Q}$, то $S = \varnothing$ или $S = \mathbb{Q}$.

Общие комментарии

Эффективная элиминация кванторов в $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$, если она возможна, нередко позволяет:

- построить разрешимое множество аксиом для $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$;
- получить явный разрешающий алгоритм для $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$;
- дать исчерпывающее описание определимости в $\mathfrak{A}$.

Эффективная элиминация кванторов в Γ также нередко позволяет получить явный разрешающий алгоритм для $[\Gamma]$. Тут уже полнота может как иметь, так и не иметь места; так или иначе, бескванторные предложения куда проще, чем произвольные.

Здесь всюду речь идёт о «естественных» структурах и теориях.

Сложение на целых числах

Возьмём $\langle 0, 1; +^2, -^1; <^2, =^2 \rangle$ в качестве σ.

Обозначим через $\mathfrak{Z}$ стандартную σ-структуру с носителем $\mathbb{Z}$.

Известно, что $\mathrm{Th}(\mathfrak{Z})$ не допускает элиминации кванторов, поскольку

$$\{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

нельзя определить в $\mathfrak{Z}$ посредством бескванторной формулы; однако элиминацию можно провести в слегка расширенной сигнатуре

$$\sigma^{\equiv} \;:=\; \sigma \cup \{\equiv_2, \equiv_3, \ldots\},$$

где $\equiv_2$, $\equiv_3$, ... суть двухместные предикатные символы, интуитивно обозначающие сравнимость по модулям 2, 3, ...

Обозначим через $\mathfrak{Z}^{\equiv}$ стандартную $\sigma^{\equiv}$-структуру с носителем $\mathbb{Z}$.

Для любых $n \in \mathbb{N}_+$ и $t \in \mathrm{Term}_{\sigma\equiv}$ положим

$$nt \ := \ \underbrace{t + \ldots + t}_{n \text{ штук } t},$$

как это делалось при обсуждении абелевых групп; отождествим $0t$ с 0. Кроме того, для каждого $n \in \mathbb{N}$ обозначим

$$\underline{n} \ := \ n1.$$

Наконец, вместо $t_1 + (-t_2)$ мы будем нередко писать $t_1 - t_2$.

Замечание

Для каждого $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ формула

$$\Phi_m(x, y) \ := \ \exists z \, (x = y + mz)$$

определяет в $\mathfrak{Z}$ двухместное отношение сравнимости по модулю m, а значит, при переходе от $\mathfrak{Z}$ к $\mathfrak{Z}^{\equiv}$ совокупность всех определимых множеств не меняется.

Замечание

Очевидно, $\mathrm{Th}(\mathfrak{Z})$ сводится к $\mathrm{Th}(\mathfrak{Z}^{\equiv})$. Поскольку $\mathfrak{Z}^{\equiv}$ является «дефинициальным расширением» $\mathfrak{Z}$, верно и обратное. Чтобы убедиться в этом, для всех $t_1, t_2 \in \mathrm{Term}_\sigma$ и $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ положим

$$P_m(t_1, t_2) \;:=\; \exists z\,(t_1 = t_2 + mz),$$

где z — первая переменная, не входящая ни в t_1, ни в t_2. Далее, рассмотрим $\eta : \mathrm{Form}_{\sigma^{\equiv}} \to \mathrm{Form}_\sigma$, действующую по правилу

$$\eta(\Phi) \;:=\; \text{результат замены в } \Phi \text{ всех атом. подформул вида } t_1 \equiv_m t_2 \text{ на } P_m(t_1, t_2).$$

Как легко понять, для любой $\Phi \in \mathrm{Sent}_{\sigma^{\equiv}}$,

$$\mathfrak{Z}^{\equiv} \Vdash \Phi \quad\Longleftrightarrow\quad \mathfrak{Z} \Vdash \eta(\Phi).$$

Стало быть, $\mathrm{Th}(\mathfrak{Z}^{\equiv})$ сводится к $\mathrm{Th}(\mathfrak{Z})$. В итоге $\mathrm{Th}(\mathfrak{Z}^{\equiv})$ и $\mathrm{Th}(\mathfrak{Z})$ оказываются эквивалентны с вычислительной точки зрения.