Математическая логика: 6

Станислав Олегович Сперанский

Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербург 2020

Явная аксиоматика для $\mathrm{Th}(\mathfrak{Z}^{\equiv})$

Извлечение аксиом из элиминации кванторов — нетривиальная, но сравнительно несложная задача. Обозначим через $\mathsf{ZA}^{\equiv}$ множество, состоящее из *универсальных замыканий* следующих $\sigma^{\equiv}$-формул.

Аксиомы линейно упорядоченных абелевых групп:

- $(x+y)+z = x+(y+z)$,
- $x+y = y+x$,
- $x+0 = x$,
- $x+(-x) = 0$,
- $x \not< x$,
- $x < y \land y < z \to x < z$,
- $x \neq y \to x < y \lor y < x$ и
- $x < y \to x+z < y+z$.

Аксиомы для (нуля и) единицы:

- $0 < 1$ и
- $x \leqslant 0 \vee 1 \leqslant x$.

Аксиомы для сравнений по модулю:

- $x \equiv_m y \leftrightarrow \exists z\, x = y + mz$ и
- $\bigvee_{k=0}^{m-1} (x \equiv_m \underline{k})$ для $m \in \{2, 3, \dots\}$.

Очевидно, $\mathfrak{Z}^{\equiv}$ является моделью $\mathrm{ZA}^{\equiv}$, а потому

$$[\mathrm{ZA}^{\equiv}] \subseteq \mathrm{Th}(\mathfrak{Z}^{\equiv}).$$

Наша ближайшая цель — доказать, что $\mathrm{ZA}^{\equiv}$ выводит все истинные в $\mathfrak{Z}^{\equiv}$ / опровергает все ложные в $\mathfrak{Z}^{\equiv}$ бескв. $\sigma^{\equiv}$-предложения.

Напоминаю, что вместо $-\underline{n}$, где $n \in \mathbb{N}$, мы иногда пишем $\underline{-n}$.

Замечание

Разумеется, как и в теории абелевых групп, в $\mathrm{ZA}^{\equiv}$ выводимы

$$-(x+y) \;=\; (-x)+(-y) \quad \text{и} \quad -(-x)=x.$$

Поэтому, в частности, для каждого $n \in \mathbb{N}$ в $\mathrm{ZA}^{\equiv}$ можно вывести

$$\underline{-n} \;=\; n(-1) \quad \text{и} \quad -(\underline{-n}) \;=\; \underline{n}.$$

Предложение

Пусть $a, b \in \mathbb{Z}$. Тогда $\mathrm{ZA}^{\equiv} \vdash \underline{a} + \underline{b} = \underline{a+b}$.

Доказательство.

Это можно легко получить из аксиом абелевых групп. □

Лемма

Пусть $t \in \mathrm{Term}^{\circ}_{\sigma^{\equiv}}$. *Тогда* $\mathrm{ZA}^{\equiv} \vdash t = \underline{t^{\mathfrak{Z}^{\equiv}}}$.

Доказательство.

Преобразуем t следующим образом.

i. Проносим $-$ внутрь t, чтобы $-$ стояло только перед 0 и 1.

ii. С помощью предложения выше получаем замнутый $\sigma^{\equiv}$-терм вида $\underline{a}$, где $a \in \mathbb{Z}$. В итоге $\mathrm{ZA}^{\equiv} \Vdash t = \underline{a}$; при этом a совпадёт со значением t в $\mathfrak{Z}^{\equiv}$, разумеется.

$\square$

Пример

Рассмотрим замкнутый $\sigma^{\equiv}$-терм

$$t \;:=\; (\underline{1} - (\underline{2} - \underline{5})) + (\underline{3} - \underline{2}).$$

Тогда в $ZA^{\equiv}$ мы получаем следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned}
(\underline{1} - (\underline{2} - \underline{5})) + (\underline{3} - \underline{2}) &= \\
(\underline{1} + (-(\underline{2} + (-\underline{5})))) + (\underline{3} + (-\underline{2})) &= \\
(\underline{1} + ((-\underline{2}) + (-(-\underline{5})))) + (\underline{3} + (-\underline{2})) &= \\
(\underline{1} + ((-\underline{2}) + \underline{5})) + (\underline{3} + (-\underline{2})) &= \\
(\underline{1} + \underline{3}) + (\underline{3} + (-\underline{2})) &= \\
\underline{4} + (\underline{3} + (-\underline{2})) &= \\
\underline{4} + \underline{1} &= \\
\underline{5}\ .
\end{aligned}$$

Значит, $ZA^{\equiv} \Vdash t = \underline{5}$.

Предложение

Пусть $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ *и* $k \in \{1, \dots, m-1\}$. *Тогда* $\mathsf{ZA}^{\equiv} \vdash \neg \underline{k} \equiv_m 0$.

Доказательство.

Будем рассуждать *внутри* $\mathsf{ZA}^{\equiv}$.

Пусть $\underline{k} \equiv_m 0$. Значит, $\underline{k} = mz$ для некоторого z.

- Если $z > 0$, то $z \geqslant 1$, а потому

$$\underline{k} \;=\; mz \;\geqslant\; m1 \;>\; k1 + (m-k)0 \;=\; \underline{k}$$

  — противоречие.

- Если $z \leqslant 0$, то мы получаем

$$0 \;=\; m0 \;\geqslant\; mz \;=\; \underline{k} \;>\; k0 \;=\; 0$$

  — противоречие.

□

Лемма

Для любого атомарного $\sigma^{\equiv}$-предложения Ω:

i. *если* $\mathfrak{Z}^{\equiv} \Vdash \Omega$, *то* $\mathrm{ZA}^{\equiv} \vdash \Omega$;

ii. *если* $\mathfrak{Z}^{\equiv} \nVdash \Omega$, *то* $\mathrm{ZA}^{\equiv} \vdash \neg\Omega$.

Доказательство.

$\boxed{\text{i.}}$ Пусть $\mathfrak{Z}^{\equiv} \Vdash \Omega$. Разумеется, Ω имеет вид $t_1 \circ t_2$, где $t_1, t_2 \in \mathrm{Term}^{\circ}_{\sigma^{\equiv}}$ и $\circ \in \{=, <, \equiv_2, \equiv_3, \ldots\}$. Для удобства обозначим

$$a_1 \ := \ t_1^{\mathfrak{Z}^{\equiv}} \quad \text{и} \quad a_2 \ := \ t_2^{\mathfrak{Z}^{\equiv}}.$$

В силу леммы выше, в $\mathrm{ZA}^{\equiv}$ выводимы $t_1 = \underline{a_1}$ и $t_2 = \underline{a_2}$.

...

Доказательство (продолжение).

- Пусть Ω имеет вид $t_1 = t_2$. Тогда a_1 равно a_2. Поэтому в $ZA^{\equiv}$ выводимо
$$t_1 = \underline{a_1} = \underline{a_2} = t_2.$$
- Пусть Ω имеет вид $t_1 < t_2$. Тогда a_1 (строго) меньше a_2. Поэтому в $ZA^{\equiv}$ выводимо
$$\begin{aligned} t_2 = \underline{a_2} = \underline{a_1} + \underline{a_2 - a_1} &= \underline{a_1} + (a_2 - a_1)\,1 \\ &> \underline{a_1} + (a_2 - a_1)\,0 = \underline{a_1} = t_1. \end{aligned}$$

...

Доказательство (продолжение).

- Пусть Ω имеет вид $t_1 \equiv_m t_2$. Тогда a_1 равно $a_2 + mb$ для нек. $b \in \mathbb{Z}$. Поэтому в $\mathsf{ZA}^{\equiv}$ выводимо

$$t_1 \;=\; \underline{a_1} \;=\; \underline{a_2 + mb} \;=\; \underline{a_2} + m\underline{b} \;=\; t_2 + m\underline{b}.$$

  Стало быть, $\mathsf{ZA}^{\equiv} \vdash \exists z\, t_1 = t_2 + mz$. Значит, $\mathsf{ZA}^{\equiv} \vdash t_1 \equiv_m t_2$.

ii. Нетрудно убедиться, что в $\mathsf{ZA}^{\equiv}$ выводимы

$$\neg x = y \leftrightarrow (x < y \vee y < x),$$
$$\neg x < y \leftrightarrow (x = y \vee y < x) \quad \text{и}$$
$$\neg x \equiv_m y \leftrightarrow (x \equiv_m y + \underline{1} \vee \dots \vee x \equiv_m y + \underline{m-1}),$$

где $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Поэтому (ii) можно получить из (i). □

Предложение

Для любого бескванторного $\sigma^{\equiv}$-предложения Φ:

i. *если* $\mathfrak{Z}^{\equiv} \Vdash \Phi$, *то* $\mathrm{ZA}^{\equiv} \vdash \Phi$;

ii. *если* $\mathfrak{Z}^{\equiv} \nVdash \Phi$, *то* $\mathrm{ZA}^{\equiv} \vdash \neg\Phi$.

Доказательство.

Индукция по построению Φ, причём сразу для обоих пунктов.

- Пусть $\Phi \in \mathrm{At}_{\sigma}$. Тогда всё следует из леммы выше.
- Пусть $\Phi = \neg\Psi$. Если $\mathfrak{Z}^{\equiv} \Vdash \Phi$, то $\mathfrak{Z}^{\equiv} \nVdash \Psi$, а потому $\mathrm{ZA}^{\equiv} \vdash \neg\Psi$, в силу инд. гипотезы. Если $\mathfrak{Z}^{\equiv} \nVdash \Phi$, то $\mathfrak{Z}^{\equiv} \Vdash \Psi$, откуда, ввиду инд. гипотезы, $\mathrm{ZA}^{\equiv} \vdash \Psi$, а потому $\mathrm{ZA}^{\equiv} \vdash \neg\neg\Psi$.

. . .

Доказательство (продолжение).

- Пусть $\Phi = \Psi \wedge \Theta$. Если $\mathfrak{Z}^{\equiv} \Vdash \Phi$, то

$$\mathfrak{Z}^{\equiv} \Vdash \Psi \quad \text{и} \quad \mathfrak{Z}^{\equiv} \Vdash \Theta,$$

откуда, в силу инд. гипотезы, $\mathrm{ZA}^{\equiv} \vdash \Psi$ и $\mathrm{ZA}^{\equiv} \vdash \Theta$, а потому $\mathrm{ZA}^{\equiv} \vdash \Psi \wedge \Theta$. Если $\mathfrak{Z}^{\equiv} \nVdash \Phi$, то

$$\mathfrak{Z}^{\equiv} \nVdash \Psi \quad \text{или} \quad \mathfrak{Z}^{\equiv} \nVdash \Theta,$$

откуда, в силу инд. гипотезы, $\mathrm{ZA}^{\equiv} \vdash \neg\Psi$ или $\mathrm{ZA}^{\equiv} \vdash \neg\Theta$, что влечёт $\mathrm{ZA}^{\equiv} \vdash \neg(\Psi \wedge \Theta)$.

- Аналогично для $\Phi = \Psi \vee \Theta$ и $\Phi = \Psi \to \Theta$.

$\square$

Вариация на доказательство.

Пусть Φ — бескванторное $\sigma^{\equiv}$-предложение. Ясно, что Φ представляет собой булеву комбинацию атомарных $\sigma^{\equiv}$-предложений. Ввиду леммы выше, Φ либо истинно во всех моделях $\mathsf{ZA}^{\equiv}$, либо ложно во всех моделях $\mathsf{ZA}^{\equiv}$, т.е.

$$\text{либо } \ \mathsf{ZA}^{\equiv} \models \Phi, \quad \text{либо } \ \mathsf{ZA}^{\equiv} \models \neg\Phi.$$

В первом случае мы получаем $\mathsf{ZA}^{\equiv} \vdash \Phi$, а во втором — $\mathsf{ZA}^{\equiv} \vdash \neg\Phi$.

Значит, для любого бескванторного $\sigma^{\equiv}$-предложения Φ,

$$\mathfrak{Z}^{\equiv} \Vdash \Phi \quad \Longleftrightarrow \quad \mathsf{ZA}^{\equiv} \vdash \Phi;$$

при этом, как легко понять, $\mathfrak{Z}^{\equiv} \Vdash \Phi$ равносильно $\mathrm{Th}(\mathfrak{Z}^{\equiv}) \vdash \Phi$.

Теорема (следствие элиминации кванторов)

$\mathrm{Th}\,(\mathfrak{Z}^{\equiv}) = [\mathrm{ZA}^{\equiv}]$.

Доказательство.

Сравнительно нетрудно проверить, что в доказательстве элиминации кванторов в $\mathrm{Th}\,(\mathfrak{Z}^{\equiv})$, приведённом ранее,

«$\mathrm{Th}\,(\mathfrak{Z}^{\equiv}) \vdash$» всюду можно заменить на «$\mathrm{ZA}^{\equiv} \vdash$».

Поэтому τ, которая реализует элиминацию кванторов в $\mathrm{Th}\,(\mathfrak{Z}^{\equiv})$, реализует её и в $\mathrm{ZA}^{\equiv}$. В частности, для всякого $\Phi \in \mathrm{Sent}_{\sigma^{\equiv}}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{ZA}^{\equiv} \vdash \Phi \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathrm{ZA}^{\equiv} \vdash \tau\,(\Phi); \\ \mathrm{Th}\,(\mathfrak{Z}^{\equiv}) \vdash \Phi \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathrm{Th}\,(\mathfrak{Z}^{\equiv}) \vdash \tau\,(\Phi), \end{aligned}$$

причём $\mathrm{Th}\,(\mathfrak{Z}^{\equiv}) \vdash \tau\,(\Phi)$, как мы знаем, равносильно $\mathrm{ZA}^{\equiv} \vdash \tau\,(\Phi)$. $\square$

Замечание

На самом деле, то, что элиминацию кванторов для $\mathrm{ZA}^{\equiv}$ реализует та же самая функция, несущественно. Важно следующее:

a. $\mathfrak{Z}^{\equiv}$ является моделью $\mathrm{ZA}^{\equiv}$;

b. $\mathrm{ZA}^{\equiv}$ допускает элиминацию кванторов;

c. $\mathrm{ZA}^{\equiv}$ знает всё про бескванторные $\sigma^{\equiv}$-предложения.

Действительно, пусть функция τ' реализует элиминацию кванторов в $\mathrm{ZA}^{\equiv}$. Рассмотрим произвольное $\Phi \in \mathrm{Sent}_{\sigma^{\equiv}}$.

- Пусть $\mathfrak{Z}^{\equiv} \Vdash \Phi$. Тогда $\mathfrak{Z}^{\equiv} \Vdash \tau'(\Phi)$, поскольку $\mathrm{ZA}^{\equiv} \vdash \Phi \leftrightarrow \tau'(\Phi)$ и $\mathfrak{Z}^{\equiv} \Vdash \mathrm{ZA}^{\equiv}$. Значит, $\mathrm{ZA}^{\equiv} \vdash \tau'(\Phi)$, откуда $\mathrm{ZA}^{\equiv} \vdash \Phi$.
- Пусть $\mathrm{ZA}^{\equiv} \vdash \Phi$. Тогда $\mathfrak{Z}^{\equiv} \Vdash \Phi$ ввиду $\mathfrak{Z}^{\equiv} \Vdash \mathrm{ZA}^{\equiv}$.

Отметим, что от τ' не требуется вычислимости.

Явная аксиоматика для $\mathrm{Th}\,(\mathfrak{Z})$

Обозначим через ZA множество, состоящее из *универс. замыканий* следующих σ-формул.

- Аксиомы линейно упорядоченных абелевых групп.
- Аксиомы для нуля и единицы: $0 < 1$ и $x \leqslant 0 \vee 1 \leqslant x$.
- Новые аксиомы для сравнений по модулю:

$$\bigvee_{k=0}^{m-1} P_m\,(x, \underline{k}) \quad \text{для } m \in \{2, 3, \ldots\};$$

тут $P_m\,(x, \underline{k})$ обозначает $\exists z\,(x = \underline{k} + mz)$, где z отлична от x.

Теорема

$\mathrm{Th}\,(\mathfrak{Z}) = [\mathrm{ZA}]$.

Доказательство.

Очевидно, $\mathrm{Th}\,(\mathfrak{Z}) = \mathrm{Th}\,(\mathfrak{Z}^{\equiv}) \cap \mathrm{Sent}_\sigma$. С другой стороны:

- каждую модель ZA можно (ед. об.) обогатить до модели $\mathrm{ZA}^{\equiv}$;
- каждую модель $\mathrm{ZA}^{\equiv}$ можно обеднить до модели ZA.

Стало быть, для любого $\Phi \in \mathrm{Sent}_\sigma$,

$$\mathrm{ZA} \vDash \Phi \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{ZA}^{\equiv} \vDash \Phi.$$

Так как $\vDash$ совпадает с $\vdash$, это означает, что $[\mathrm{ZA}] = [\mathrm{ZA}^{\equiv}] \cap \mathrm{Sent}_\sigma$. Следовательно, $[\mathrm{ZA}] = \mathrm{Th}\,(\mathfrak{Z})$ ввиду $[\mathrm{ZA}^{\equiv}] = \mathrm{Th}\,(\mathfrak{Z}^{\equiv})$. $\square$

Замечание

То, что $[\mathrm{ZA}]$ совпадает с $[\mathrm{ZA}^{\equiv}] \cap \mathrm{Sent}_\sigma$, нетрудно доказать и из чисто дедуктивных соображений, не прибегая к помощи моделей.

Вместо аксиом для сравнений можно рассмотреть σ-формулы вида

$$\Phi(x/0) \wedge \forall x\,(0 \leqslant x \wedge \Phi \to \Phi(x/(x+1))) \to \forall x\,(0 \leqslant x \to \Phi).$$

Мы будем называть их аксиомами индукции. Обозначим соответствующее множество σ-предложений через ZA'.

Предложение

$[\mathrm{ZA}'] = [\mathrm{ZA}]$.

Доказательство.

$\boxed{\subseteq}$ Ясно, что $\mathfrak{Z} \Vdash \mathrm{ZA}'$, а потому $[\mathrm{ZA}'] \subseteq \mathrm{Th}(\mathfrak{Z}) = [\mathrm{ZA}]$.

...

Доказательство (продолжение).

$\boxed{\supseteq}$ Достаточно показать, что универсальные замыкания аксиом для сравнений выводимы в ZA$'$. Пусть $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Обозначим

$$\Psi_m(x) \;:=\; \bigvee_{k=0}^{m-1} P_m(x, \underline{k}).$$

Далее будем рассуждать внутри ZA$'$.

Сначала по индукции докажем, что $\forall x\,(0 \leqslant x \to \Psi_m(x))$.

База: Очевидно, $0 = \underline{0} + m0$, а потому $P_m(0, \underline{0})$, откуда $\Psi_m(x/0)$.

...

Доказательство (продолжение).

Шаг индукции: Пусть $\Psi_m(x)$, т.е. найдётся $k \in \{0, \ldots, m-1\}$ такое, что $P_m(x, \underline{k})$. Значит, $x = \underline{k} + mz$ для некоторого z. Отсюда

$$x + 1 \;=\; \underline{k} + mz + 1 \;=\; \underline{k+1} + mz.$$

При этом $k + 1 \leqslant m$, поскольку $k < m$.

- Если $k + 1 < m$, то $\Psi_m(x/(x+1))$ ввиду $P_m(x+1, \underline{k+1})$.
- Если $k + 1 = m$, то $x + 1 = \underline{m} + mz = m(z+1)$, а потому $P_m(x+1, \underline{0})$, откуда вновь $\Psi_m(x/(x+1))$.

...

Доказательство (продолжение).

Теперь докажем, что $\forall x\,(x < 0 \to \Psi_m(x))$.

Пусть $x < 0$. Тогда $0 < -x$. Поэтому найдутся $k \in \{0, \ldots, m-1\}$ и z такие, что $-x = \underline{k} + mz$.

- Пусть $k = 0$. Тогда $x = -mz$, а потому $P_m(x, \underline{0})$, откуда $\Psi_m(x)$.
- Пусть $k \neq 0$. Тогда $x = \underline{-k} - mz$, что можно переписать как

$$x \;=\; \underline{m} - \underline{k} - mz - \underline{m} \;=\; \underline{m-k} - m(z+1),$$

а потому $P_m(x, \underline{m-k})$, откуда $\Psi_m(x)$.

Наконец, объединяя вместе случаи $0 \leqslant x$ и $x < 0$, мы получаем

$$\forall x\,((0 \leqslant x \vee x < 0) \to \Psi_m(x)),$$

что равносильно $\forall x\,\Psi_m(x)$. $\square$

Зададим σ_+ как $\langle 0; \mathsf{s}^1, +^2; <^2, =^2\rangle$.

Обозначим стандартную σ_+-структуру с носителем $\mathbb{N}$ через $\mathfrak{N}_+$.

Для проведения элиминации опять нужно расширить σ_+:

$$\sigma_+^{\equiv} \;:=\; \sigma_+ \cup \{\equiv_2, \equiv_3, \ldots\}.$$

Обозначим за $\mathfrak{N}_+^{\equiv}$ стандартную $\sigma_+^{\equiv}$-структуру с носителем $\mathbb{N}$.

С незначительными изменениями все результаты, замечания и комментарии, касающиеся $\mathfrak{Z}$ и $\mathfrak{Z}^{\equiv}$, переносятся на $\mathfrak{N}_+$ и $\mathfrak{N}_+^{\equiv}$.

Под арифметикой Пресбургера понимают как $\mathrm{Th}(\mathfrak{Z})$, так и $\mathrm{Th}(\mathfrak{N}_+)$.

- Поскольку $\mathfrak{N}_+$ в некотором смысле является частью $\mathfrak{Z}$, может показаться, что $\mathfrak{N}_+$ проще $\mathfrak{Z}$. Однако, как известно, элементы $\mathbb{Z}$ можно моделировать с помощью элементов $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$; поэтому $\mathfrak{N}_+$ и $\mathfrak{Z}$ оказываются «взаимно интерпретируемы».

- У $\mathrm{Th}\,(\mathfrak{N}_+)$ имеется аксиоматика, аналогичная ZA. Но тут есть свои нюансы, связанные с тем, что порой «поз. утверждения» выводятся в ZA с помощью $-$. Так, в ZA выводимо

$$x + z \; < \; y + z \quad \longrightarrow \quad x \; < \; y$$

поскольку к обеим частям исходного неравенства можно добавить $-z$. Разумеется, это должно быть выводидимо из аксиом для $\mathrm{Th}\,(\mathfrak{N}_+)$, хотя $-z$ при этом использовать нельзя.

Одна из явных аксиоматик для $\mathrm{Th}\,(\mathfrak{N}_+)$

Для разнообразия рассмотрим аксиоматику для $\mathrm{Th}\,(\mathfrak{N}_+)$, которая внешне непохожа на ZA. Обозначим через PrA множество, состоящее из *универсальных* замыканий σ_+-формул

- $\mathrm{s}\,(x) \neq 0$,
- $\mathrm{s}\,(x) = \mathrm{s}\,(y) \to x = y$,
- $x + 0 = x$,
- $x + \mathrm{s}\,(y) = \mathrm{s}\,(x + y)$,
- $x \not< 0$ и
- $x < \mathrm{s}\,(y) \leftrightarrow (x < y \vee x = y)$,

а также универсальных замыканий всех σ_+-формул вида

$$\Phi\,(x/0) \wedge \forall x\,(\Phi\,(x/x) \to \Phi\,(x/\mathrm{s}\,(x))) \to \forall x\,\Phi,$$

которые в совокупности называются схемой аксиом индукции в σ_+.

Упражнение *%см. практические занятия*

Следующие σ_+-формулы (их универс. замыкания) выводимы в PrA:

a. $(x+y)+z=x+(y+z)$;
b. $x+y=y+x$;
c. $x \not< x$;
d. $x<y \wedge y<z \to x<z$;
e. $x \neq y \to x<y \vee y<x$;
f. $x<y \leftrightarrow x+z<y+z$;
g. $x<\mathrm{s}(x)$;
h. $y \leqslant x \vee \mathrm{s}(x) \leqslant y$;
i. $x \leqslant y \to \exists! z\, x+z=y$.

В результате PrA начинает походить на ZA$'$.

Замечание

Далее, по аналогии с тем, как мы доказывали $[\mathrm{ZA}'] = \mathrm{Th}\,(\mathfrak{Z})$, можно показать, что $[\mathrm{PrA}]$ совпадает с $\mathrm{Th}\,(\mathfrak{N}_+)$. Таким образом, $\mathrm{Th}\,(\mathfrak{N}_+)$ — это разрешимая теория, которая задается весьма естественным множеством аксиом. Вместе с тем известно, что при добавлении в язык умножения разрешимость теряется бесповоротно. В дальнейшем это утверждение будет уточнено и доказано.

Больше примеров разрешимых теорий

- Теория вещественно замкнутых (упорядоченных) полей, которая совпадает с теорией упор. поля вещественных чисел.
- Теория линейных порядков.
- Теория булевых алгебр.
- Теория линейно упорядоченных абелевых групп.
- Теория класса всех *конечных* полей.

Замечание

Вообще, если теория класса $\mathcal{K}$ разрешима, то теория класса $\mathcal{K}_{\mathrm{fin}}$ всех конечных структур из $\mathcal{K}$ *обычно* также разрешима. Тот факт, что $\mathcal{K}_{\mathrm{fin}}$ практически никогда не аксиоматизируем, на это не влияет.

- Теория стандартной модели арифметики.
- Теория кольца целых чисел.
- Теория поля рациональных чисел.
- Теория частичных порядков.
- Теория дистрибутивных решёток.
- Теория групп.
- Теория полей, а также теория полей характеристики 0.

При этом последние четыре теории оказываются эквивалентны Halt с выч. точки зрения, а первые три — «в $\aleph_0$ раз сложнее Halt».

Более специальные, но по-своему полезные неразрешимые теории:

- Теория симметричных иррефлексивных графов.
- Теория двух эквивалентностей.
- Теория двух линейных порядков.
- Теория эквивалентности и линейного порядка.

Все они будут эквивалентны Halt (с вычислительной точки зрения).

Замечание

Пусть $\Gamma \cup \{\Phi\} \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$. Тогда для любого $\Psi \in \mathrm{Sent}_\sigma$,

$$\Gamma \cup \{\Phi\} \vdash \Psi \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \vdash \Phi \to \Psi.$$

Стало быть, $[\Gamma \cup \{\Phi\}] \leqslant [\Gamma]$. Поэтому, в частности:

- неразрешимость теории частичных порядков влечёт неразрешимость теории предпорядков, а из неразрешимости теории полей следует неразрешимость теории колец;
- из разрешимости теории линейных порядков получается разрешимость теории плотных линейных порядков.

Более тонкий метод — это «интерпретация одного класса в другом». Например, поскольку поле комплексных чисел можно смоделировать в рамках поля вещественных чисел, теорию первого можно свести к теории второго, а потому теория поля $\mathbb{C}$ разрешима.

Пример

Для удобства обозначим за $\mathfrak{Q}$ и $\mathfrak{R}$ стандартные поля над $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ соответственно. Ясно, что $\mathfrak{Q}$ является подполем $\mathfrak{R}$. Вместе с тем:

- $\mathrm{Th}(\mathfrak{R})$ разрешимо;
- $\mathrm{Th}(\mathfrak{Q})$ неразрешимо (более того, далеко от перечислимости).

Поэтому $\mathbb{Q}$ не определимо в $\mathfrak{R}$, поскольку иначе мы могли бы смоделировать $\mathfrak{Q}$ в рамках $\mathfrak{R}$, что дало бы $\mathrm{Th}(\mathfrak{Q}) \leqslant \mathrm{Th}(\mathfrak{R})$.

С другой стороны, обогащение $\mathfrak{R}$ посредством добавления одноместного предиката «быть рациональным числом» имеет как мин. ту же — на самом деле, куда большую — сложность, что и $\mathfrak{Q}$.

Общие комментарии

- Разрешимые теории встречаются сравнительно редко, но обладают особой привлекательностью.
- Для доказательства разрешимости теорий таких классов как булевы алгебры, абелевы группы и *конечные* поля требуется глубокий анализ строения соответствующих структур.
- Большинство теорий неразрешимы. Сложность таких теорий можно измерять в терминах степеней.
- Чтобы глубже понять алгоритмические свойства теории, мы можем перейти к изучению её естественных фрагментов, которые состоят из формул специального вида.