

Математическая логика (более продвинутая)

аннотация

Данный курс главным образом посвящён следующим темам:

- метод элиминации кванторов и его применения;
- теоремы Гёделя о неполноте и сопутствующие результаты;
- интерпретации между теориями;
- анализ бесконечно малых.

Метод элиминации кванторов — это способ доказательства алгоритмической разрешимости теорий, позволяющий также получать глубокие результаты об определмости. Мы применим его для доказательства разрешимости теории дискретно упорядоченной группы целых чисел по сложению (часто именуемой «арифметикой Пресбургера») и теории упорядоченного поля вещественных чисел (которую можно отождествить с элементарной геометрией) и получения сопутствующих результатов об определмости. Эти результаты играют важную роль в математике и информатике.

Далее, мы установим тесную связь между выводимостью в арифметических теориях и вычислимостью. Это позволит нам доказать знаменитые теоремы Гёделя о неполноте — пожалуй, самые известные и широко обсуждаемые за пределами самой математики математические результаты. У них имеется немало полезных следствий, среди которых теорема Тарского о неопределимости арифметической истины, которая служит отправным пунктом в современных исследованиях по формальной теории истины, а также различные результаты о «сильной неразрешимости» теорий (например, теории колец).

Интерпретации между теориями — то, что позволяет устанавливать связи между математическими теориями в различных языках. Использование интерпретаций позволяет получить общую картину, упорядочивающую теории по их дедуктивным, алгоритмическим и выразительным возможностям.

Как известно, первый учебник по математическому анализу назывался «Анализ бесконечно малых» и был написан Лопиталем. «Актуально бесконечно малые величины» активно использовались ещё Лейбницем и Ньютоном, а затем — Эйлером, Лагранжем и многими другими классиками анализа. Тем не менее, идея бесконечно малых подвергалась серьёзной критике, что привело к изгнанию бесконечно малых из математики (но не из физики) на некоторое время. Однако в середине XX века логик Абрахам Робинсон предложил современное математическое обоснование метода бесконечно малых, которые с тех пор стали не менее легальными объектами, чем множества. В курсе будут изложены основы современного подхода к анализу бесконечно малых.