Дистрибутивные решётки в алгебре и логике

Станислав Олегович Сперанский

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

(МЦМУ МИАН)

[Лобачевские чтения 2022]

https://homepage.mi-ras.ru/~speranski/ » Teaching

1. Решётки

Рассмотрим сигнатуру

$$\sigma \ := \ \langle \wedge, \vee; = \rangle.$$

Обозначим за L множество, состоящее из универс. замыканий следующих σ-формул:

- $x \wedge y = y \wedge x$;
- $x \vee y = y \vee x$;
- $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$;
- $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$;
- $x \vee (x \wedge y) = x$; *%закон поглощения*
- $x \wedge (x \vee y) = x$. *%закон поглощения*

Под решётками понимаются модели L.

Утверждение 1.1

В L выводимы законы идемпотентности:

a. $x \wedge x = x$;

b. $x \vee x = x$.

Доказательство. $\boxed{\text{a}}$ Заметим, что $x \wedge x = x \wedge (x \vee (x \wedge x)) = x$.

$\boxed{\text{b}}$ Аналогично (a). $\square$

Введём обозначения:

$$
\begin{aligned}
x \leqslant y \;&:=\; x \wedge y = x; \\
\operatorname{Inf}(x, y, z) \;&:=\; z \leqslant x \wedge z \leqslant y \wedge \forall u \,(u \leqslant x \wedge u \leqslant y \to u \leqslant z); \\
\operatorname{Sup}(x, y, z) \;&:=\; x \leqslant z \wedge y \leqslant z \wedge \forall u \,(x \leqslant u \wedge y \leqslant u \to z \leqslant u).
\end{aligned}
$$

Интуитивно: если $\leqslant$ определяет частичный порядок, то Inf определяет инфимум относительно $\leqslant$, а Sup — супремум.

Утверждение 1.2

В L выводима $x \leqslant y \leftrightarrow x \vee y = y$.

Доказательство. Если $x \wedge y = x$, то $y = y \vee (y \wedge x) = x \vee y$.

Если $x \vee y = y$, то $x = x \wedge (x \vee y) = x \wedge y$. $\square$

Утверждение 1.3

В L выводимы:

a. $x \leqslant x$;

b. $x \leqslant y \to (y \leqslant z \to x \leqslant z)$;

c. $x \leqslant y \to (y \leqslant x \to x = y)$.

Доказательство. $\boxed{\text{a}}$ Заметим, что $x \leqslant x$ графически совпадает с $x \wedge x = x$.

$\boxed{\text{b}}$ Пусть $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$, т.е. $x \wedge y = x$ и $y \wedge z = y$. Тогда

$$x \wedge z \;=\; (x \wedge y) \wedge z \;=\; x \wedge (y \wedge z) \;=\; x \wedge y \;=\; x,$$

т.е. $x \leqslant z$.

$\boxed{\text{c}}$ Пусть $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$, т.е. $x \wedge y = x$ и $y \wedge x = y$. Тогда $x = y$. $\square$

Утверждение 1.4

В L выводимы:

a. $x \wedge y = z \leftrightarrow \mathrm{Inf}\,(x, y, z)$;

b. $x \vee y = z \leftrightarrow \mathrm{Sup}\,(x, y, z)$.

Доказательство. $\boxed{\text{a}}$ Покажем, что $x \wedge y$ — инфимум $\{x, y\}$ относительно $\leqslant$.

- Очевидно, $x \vee (x \wedge y) = x$ и $y \vee (x \wedge y) = y$, т.е. $x \wedge y \leqslant x$ и $x \wedge y \leqslant y$.
- Пусть $z \leqslant x$ и $z \leqslant y$, т.е. $z \wedge x = z$ и $z \wedge y = z$. Тогда

$$z \wedge (x \wedge y) \;=\; (z \wedge x) \wedge y \;=\; z \wedge y \;=\; z,$$

т.е. $z \leqslant x \wedge y$.

$\boxed{\text{b}}$ Покажем, что $x \vee y$ — супремум $\{x, y\}$ относительно $\leqslant$.

- Очевидно, $x \wedge (x \vee y) = x$ и $y \wedge (x \vee y) = y$, т.е. $x \leqslant x \vee y$ и $y \leqslant x \vee y$.
- Пусть $x \leqslant z$ и $y \leqslant z$, т.е. $x \vee z = z$ и $y \vee z = z$. Тогда

$$(x \vee y) \vee z \;=\; x \vee (y \vee z) \;=\; x \vee z \;=\; z,$$

  т.е. $x \vee y \leqslant z$.

$\square$

Для каждой решётки $\mathfrak{L}$ возьмём

$$\leqslant_{\mathfrak{L}} := \left\{(a,b) \in L^2 \mid \mathfrak{L} \Vdash a \leqslant b\right\}$$

и обозначим за $\mathrm{O}\left(\mathfrak{L}\right)$ ч.у.м. $\langle L; \leqslant_{\mathfrak{L}}\rangle$. Мы будем называть ч.у.м. $\langle A; \leqslant_A\rangle$ решёточным, если у всякого непустого конечного подмножества A есть инфимум и супремум в $\langle A; \leqslant_A\rangle$.[1]

Теорема 1.5

i. Для любых решёток $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$,

$$\mathfrak{L}_1 \;=\; \mathfrak{L}_2 \quad\Longleftrightarrow\quad \mathrm{O}\left(\mathfrak{L}_1\right) \;=\; \mathrm{O}\left(\mathfrak{L}_2\right).$$

ii. Для каждого решёточного ч.у.м. $\mathfrak{A}$ найдётся решётка $\mathfrak{L}$ такая, что $\mathrm{O}\left(\mathfrak{L}\right) = \mathfrak{A}$.

[1] Достаточно потребовать, чтобы у всякого $\{a,b\} \subseteq A$ были инфимум и супремум относительно $\leqslant_A$.

Доказательство. $\boxed{\text{i}}$ В силу предыдущего утверждения, для каждой решётки $\mathfrak{L}$,

$$\wedge^{\mathfrak{L}}(a,b) \;=\; \inf_{\leqslant_{\mathfrak{L}}}\{a,b\} \quad \text{и} \quad \vee^{\mathfrak{L}}(a,b) \;=\; \sup_{\leqslant_{\mathfrak{L}}}\{a,b\}.$$

Поэтому $\mathrm{O}(\mathfrak{L}_1) = \mathrm{O}(\mathfrak{L}_2)$ влечёт $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}_2$. (Прямая импликация тривиальна.)

$\boxed{\text{ii}}$ Пусть $\langle A; \leqslant_A\rangle$ — решёточный ч.у.м. Заметим, что

$$a \leqslant_A b \quad\Longleftrightarrow\quad \inf_{\leqslant_A}\{a,b\} \;=\; a.$$

Рассмотрим σ-структуру $\mathfrak{L}$ с носителем A, в которой

$$\wedge^{\mathfrak{L}}(a,b) \;:=\; \inf_{\leqslant_A}\{a,b\} \quad \text{и} \quad \vee^{\mathfrak{L}}(a,b) \;:=\; \sup_{\leqslant_A}\{a,b\}.$$

Нетрудно убедиться, что $\mathfrak{L}$ окажется решёткой, причём $\leqslant_{\mathfrak{L}}$ совпадёт с $\leqslant_A$. $\square$

Далее, решётка называется:

- дистрибутивной, если в ней истинны
  - $\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z))$ и
  - $\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z))$;
- ограниченной, если в ней истинны
  - $\exists u\, \forall x\, (u \wedge x = u)$ и %$\exists u\, \forall x\, (u \leqslant x)$
  - $\exists u\, \forall x\, (x \vee u = u)$. %$\exists u\, \forall x\, (x \leqslant u)$

Пусть $\mathfrak{L}$ — ограниченная дистрибутивная решётка. Возьмём

$$0 \;:=\; \inf_{\leqslant_{\mathfrak{L}}} L \quad \text{и} \quad 1 \;:=\; \sup_{\leqslant_{\mathfrak{L}}} L.$$

Под дополнением $a \in L$ в $\mathfrak{L}$ понимается $b \in L$ такой, что $a \wedge b = 0$ и $a \vee b = 1$. Дополнение может и не существовать, разумеется.

Утверждение 1.6

Если в решётке истиннен один из законов дистрибутивности, то она дистрибутивна.

Доказательство. Если в решётке истиннен первый закон, то второй получается так:

$$\begin{aligned} a \vee (b \wedge c) &= (a \vee (a \wedge c)) \vee (b \wedge c) \\ &= a \vee ((a \wedge c) \vee (b \wedge c)) \\ &= a \vee ((a \vee b) \wedge c) \\ &= (a \wedge (a \vee b)) \vee ((a \vee b) \wedge c) \\ &= ((a \vee b) \wedge a) \vee ((a \vee b) \wedge c) \\ &= (a \vee b) \wedge (a \vee c). \end{aligned}$$

Аналогичным образом из второго закона следует первый. $\square$

Утверждение 1.7: единственность дополнений

Пусть $\mathfrak{L}$ — ограниченная дистрибутивная решётка. Тогда для любых $a, b, c \in L$,

$$a \wedge b = a \wedge c = 0 \quad \text{и} \quad a \vee b = a \vee c = 1 \quad \Longrightarrow \quad b = c.$$

Здесь и далее мы пишем $\wedge$ и $\vee$ вместо $\wedge^{\mathfrak{L}}$ и $\vee^{\mathfrak{L}}$ во избежание загромождения текста.

Доказательство. Заметим, что

$$\begin{aligned}
b &= b \vee 0 \\
&= b \vee (a \wedge c) \\
&= (b \vee a) \wedge (b \vee c) \\
&= (a \vee c) \wedge (b \vee c) \\
&= (a \wedge b) \vee c \\
&= 0 \vee c \\
&= c.
\end{aligned}$$

$\square$

Будем говорить, что ч.у.м. $\langle A; \leqslant_A \rangle$ решёточно полон, если у всякого подмножества A есть инфимум и супремум относительно $\leqslant_A$.

Замечание. Соответственно решётку $\mathfrak{L}$ называют полной, если у каждого подмножества L есть инфимум и супремум относительно $\leqslant_{\mathfrak{L}}$.

Утверждение 1.8

Для любого ч.у.м. $\mathfrak{A}$ следующие условия эквивалентны:

i. $\mathfrak{A}$ решёточно полон;

ii. у всякого подмножества A есть инфимум относительно $\leqslant_A$;

iii. у всякого подмножества A есть супремум относительно $\leqslant_A$.

Доказательство. Достаточно установить эквивалентность (ii) и (iii).

$\boxed{\text{ii} \Rightarrow \text{iii}}$ Заметим, что $\inf \varnothing$ является наибольшим элементом в $\mathfrak{A}$; как и прежде, обозначим его через 1. Пусть $S \subseteq A$. Возьмём

$$S' := \{a \in A \mid s \leqslant a \text{ для всех } s \in S\},$$

т.е. S' — множество всех верхних граней S в $\mathfrak{A}$. В частности, $1 \in S'$. Поскольку каждый элемент S является нижней гранью S' в $\mathfrak{A}$, мы имеем $s \leqslant \inf S'$ для всех $s \in S$. Поэтому $\inf S' \in S'$. Значит, $\inf S'$ — наименьший элемент в S', т.е. супремум S в $\mathfrak{A}$.

$\boxed{\text{iii} \Rightarrow \text{ii}}$ Аналогично импликации из (ii) в (iii). $\square$

Теорема 1.9: Кнастера–Тарского

Пусть $\mathfrak{A}$ — решёточно полный ч.у.м., а f — гомоморфизм из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}$. Возьмём

$$F := \{a \in A \mid f(a) = a\}.$$

Тогда индуцированный ч.у.м. $\mathfrak{F}$ с носителем F также решёточно полон.

Замечание. Разумеется, утверждение 1.9 можно переформулировать в терминах решёток; этот результат играет важную роль в теоретической информатике.

Доказательство. Сначала покажем, что у f есть наименьшая неподвижная точка. Для этого возьмём

$$S := \{a \in A \mid f(a) \leqslant a\} \quad \text{и} \quad s_0 := \inf S.$$

В частности, $1 \in S$. Кроме того, $f[S] \subseteq S$, поскольку f монотонна. Проверим, что s_0 — наименьшая неподвижная точка f.

- Для любого $s \in S$ мы имеем $s_0 \leqslant s$ и, следовательно, $f(s_0) \leqslant f(s) \leqslant s$. Стало быть, $f(s_0) \leqslant s_0$, т.е. $s_0 \in S$. Вместе с тем $s_0 \leqslant \inf(f[S]) \leqslant f(s_0)$. Итак, $s_0 \in F$.
- Более того, если $a \in F$, то $a \in S$, а потому $s_0 \leqslant a$.

Теперь рассмотрим произвольное $C \subseteq F$. Возьмём

$$c_1 \ := \ \sup C \quad \text{и} \quad [c_1, 1] \ := \ \{a \in A \mid c_1 \leqslant a\}.$$

Заметим, что индуцированный ч.у.м. на $[c_1, 1]$ будет снова решёточно полон. Кроме того, легко видеть, что $f\,[[c_1, 1]] \subseteq [c_1, 1]$:

> Для любого $c \in C$ мы имеем $c \leqslant c_1$ и, следовательно, $c = f\,(c) \leqslant f\,(c_1)$. Стало быть, $c_1 \leqslant f\,(c_1)$. Поэтому если $a \in [c_1, 1]$, то $f\,(a) \in [f\,(c_1), 1] \subseteq [c_1, 1]$.

Пусть $c_\star$ — наименьшая неподвижная точка ограничения f на $[c_1, 1]$. Как нетрудно убедиться, она окажется супремумом C в $\mathfrak{F}$. $\square$

2. Булевы алгебры

Рассмотрим расширенную сигнатуру

$$\sigma' \;:=\; \langle 0, 1; \wedge, \vee, \neg; = \rangle.$$

Обозначим за BA множество, состоящее из элементов L, а также универсальных замыканий следующих σ'-формул:

- $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;
- $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$;
- $0 \wedge x = 0$;
- $x \vee 1 = 1$;
- $x \wedge \neg x = 0$; %аксиома дополнения
- $x \vee \neg x = 1$. %аксиома дополнения

Под булевыми алгебрами понимаются модели BA. Значит, σ'-структура $\mathfrak{B}$ является булевой алгеброй тогда и только тогда, когда σ-обеднение $\mathfrak{B}$ — ограниченная дистрибутивная решётка, в которой у каждого элемента есть дополнение, причём:

- $0^{\mathfrak{B}}$ — наименьший элемент, а $1^{\mathfrak{B}}$ — наибольший элемент;
- $\neg^{\mathfrak{B}}$ — функция, сопоставляющая всякому элементу B его дополнение.[2]

Разумеется, так как в теории решёток $x \wedge y = x$ равносильно $x \vee y = y$, аксиомы для наименьшего и наибольшего элементов можно переформулировать следующим образом:

- $0 \vee x = x$;
- $x \wedge 1 = x$.

Они в некотором смысле чуть сильнее, чем исходные аксиомы:

[2] Как мы знаем, это дополнение единственно.

Упражнение

Обозначим за BA^* множество, состоящее из универс. замыканий следующих σ'-формул:

- законы коммутативности;
- законы дистрибутивности;
- $0 \vee x = x$;
- $x \wedge 1 = x$;
- аксиомы дополнения.

Тогда $[\mathsf{BA}^*] = [\mathsf{BA}]$, т.е. BA^* дедуктивно эквивалентно BA. Таким образом, в BA^* выводимы законы ассоциативности и законы поглощения.

Решение. Сначала заметим, что в BA^* выводимы (оригинальные) аксиомы для наименьшего и наибольшего элементов:

$$\begin{aligned} 0 \wedge x &= (0 \wedge x) \vee 0 \\ &= (0 \wedge x) \vee (\neg x \wedge x) \\ &= (0 \vee \neg x) \wedge x \\ &= \neg x \wedge x \\ &= 0; \end{aligned}$$

аналогично для $x \vee 1 = 1$. С их помощью легко вывести законы поглощения:

$$\begin{aligned} x \wedge (x \vee y) &= (x \vee 0) \wedge (x \vee y) \\ &= x \vee (0 \wedge y) \\ &= x \vee 0 \\ &= x; \end{aligned}$$

аналогично для $x \vee (x \wedge y) = x$.

Далее, заметим, что в BA^* мы имеем:

$$\begin{aligned} u &= u \wedge 1 = u \wedge (x \vee \neg x) = (u \wedge x) \vee (u \wedge \neg x); \\ u &= u \vee 0 = u \vee (x \wedge \neg x) = (u \vee x) \wedge (u \vee \neg x). \end{aligned}$$

Отсюда легко получить законы сокращения:

- если $u \wedge x = v \wedge x$ и $u \wedge \neg x = v \wedge \neg x$, то $u = v$;
- если $u \vee x = v \vee x$ и $u \vee \neg x = v \vee \neg x$, то $u = v$.

Давайте с их помощью выведем закон ассоциативности для $\wedge$. С одной стороны,

$$\begin{aligned} ((x \wedge y) \wedge z) \vee x &= ((x \wedge y) \vee x) \wedge (z \vee x) \\ &= x \wedge (z \vee x) \\ &= x \\ &= (x \wedge (y \wedge z)) \vee x, \end{aligned}$$

а с другой —

$$
\begin{aligned}
((x \wedge y) \wedge z) \vee \neg x &= ((x \wedge y) \vee \neg x) \wedge (z \vee \neg x) \\
&= ((x \vee \neg x) \wedge (y \vee \neg x)) \wedge (z \vee \neg x) \\
&= (1 \wedge (y \vee \neg x)) \wedge (z \vee \neg x) \\
&= (y \vee \neg x) \wedge (z \vee \neg x) \\
&= (y \wedge z) \vee \neg x \\
&= 1 \wedge ((y \wedge z) \vee \neg x) \\
&= (x \vee \neg x) \wedge ((y \wedge z) \vee \neg x) \\
&= (x \wedge (y \wedge z)) \vee \neg x.
\end{aligned}
$$

Значит, $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$ ввиду второго закона сокращения. Аналогично выводится закон ассоциативности для $\vee$. $\square$

Утверждение 2.1

В BA выводимы $\neg 0 = 1$ и $\neg 1 = 0$. %здесь ¬ - функциональный символ

Доказательство. Ясно, что $\neg 0$ и 1 оба являются дополнениями 0. Стало быть, $\neg 0 = 1$, в силу единственности дополнений. Аналогично для $\neg 1 = 0$. □

Утверждение 2.2

В BA выводима $\neg\neg x = x$. %здесь ¬ - функциональный символ

Доказательство. Ясно, что $\neg\neg x$ и x суть дополнения $\neg x$. Поэтому $\neg\neg x = x$. □

Утверждение 2.3

В BA выводимы законы де Моргана:

i. $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$;

ii. $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$.

Доказательство. $\boxed{\text{i}}$ В силу единственности дополнений, нам нужно лишь показать, что $\neg x \vee \neg y$ является дополнением $x \wedge y$. Действительно,

$$\begin{aligned}(x \wedge y) \wedge (\neg x \vee \neg y) &= (x \wedge y \wedge \neg x) \vee (x \wedge y \wedge \neg y) \\ &= (y \wedge 0) \vee (x \wedge 0) \\ &= 0 \vee 0 \\ &= 0.\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}(x \wedge y) \vee (\neg x \vee \neg y) &= (x \vee \neg x \vee \neg y) \wedge (y \vee \neg x \vee \neg y) \\ &= (1 \vee \neg y) \wedge (1 \vee \neg x) \\ &= 1 \wedge 1 \\ &= 1.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{ii}}$ Аналогично (i). $\square$

В дальнейшем нам понадобятся два сокращения:

$$
\begin{aligned}
x \to y \; &:= \; \neg x \vee y; \\
x \leftrightarrow y \; &:= \; (x \to y) \wedge (y \to x).
\end{aligned}
$$

Соответствующие бинарные операции тесно связаны с отношением порядка:

Утверждение 2.4

Пусть $\mathfrak{B}$ — булева алгебра. Тогда для любых $a, b \in B$:

$$
\begin{aligned}
a \to b \; = \; 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad a \leqslant b; \\
a \leftrightarrow b \; = \; 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad a = b.
\end{aligned}
$$

Доказательство. Сначала установим первую эквивалентность:

- если $\neg a \vee b = 1$, то $a = a \wedge 1 = a \wedge (\neg a \vee b) = (a \wedge \neg a) \vee (a \wedge b) = 0 \vee (a \wedge b) = a \wedge b$;
- если $a = a \wedge b$, то $\neg a \vee b = \neg\,(a \wedge b) \vee b = \neg a \vee \neg b \vee b = \neg a \vee 1 = 1$.

Вторая же эквивалентность следует из первой. $\square$

Утверждение 2.5

Пусть $\mathfrak{B}$ — булева алгебра. Тогда для любых $a, b, c \in B$,

$$a \leqslant b \to c \quad\Longleftrightarrow\quad a \wedge b \leqslant c.$$

Доказательство. Заметим, что $a \to (b \to c) = a \wedge b \to c$. Поэтому

$$a \leqslant b \to c \quad\Longleftrightarrow\quad a \to (b \to c) \;=\; 1 \quad\Longleftrightarrow\quad a \wedge b \to c \;=\; 1 \quad\Longleftrightarrow\quad a \wedge b \leqslant c.$$

$\square$

Теперь уже нетрудно получить ряд полезных результатов, связанных с PCL.

Утверждение 2.6

Для любой пропозициональной формулы ϕ следующие условия эквивалентны:

i. ϕ выводима в гильбертовском исчислении для PCL;

ii. $\phi = 1$ истинна во всех булевых алгебрах;

iii. $\phi = 1$ истинна в некоторой нетривиальной булевой алгебре.[3]

Доказательство. $\boxed{\text{i} \Rightarrow \text{ii}}$ Простая индукция по длине вывода ϕ.

$\boxed{\text{ii} \Rightarrow \text{iii}}$ Очевидно.

$\boxed{\text{iii} \Rightarrow \text{i}}$ Мы можем рассмотреть двухэлементную подалгебру (нетривиальной булевой алгебры) и воспользоваться теоремой о полноте для PCL. $\square$

[3] Здесь $\phi = 1$ воспринимается как атомарная σ'-формула.

Следствие 2.7

Для любых σ'-термов t_1 и t_2 следующие условия эквивалентны:

i. $t_1 = t_2$ истинна в некоторой нетривиальной булевой алгебре;

ii. $t_1 = t_2$ истинна во всех булевых алгебрах;

iii. $t_1 \leftrightarrow t_2$ выводима в гильбертовском исчислении для PCL.[4]

Доказательство. Непосредственно следует из предыдущих двух результатов. □

[4] Здесь $t_1 \leftrightarrow t_2$ воспринимается как пропозициональная формула.

3. Булевы кольца

Введём обозначения

$$x \oplus y \;:=\; (x \wedge \neg y) \vee (y \wedge \neg x) \quad \text{и} \quad x \odot y \;:=\; x \wedge y.$$

На булевы алгебры можно смотреть как на особого рода кольца:

Утверждение 3.1

В BA выводимы:

i. $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$;

ii. $x \oplus y = y \oplus x$;

iii. $x \oplus 0 = x$;

iv. $x \oplus x = 0$; %т.е. x играет обратного по $\oplus$

v. $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$;

vi. $x \odot y = y \odot x$;

vii. $x \odot 1 = x$;

viii. $x \odot (y \oplus z) = (x \odot y) \oplus (x \odot z)$;

ix. $x \odot x = x$. %в кольцах это называют идемпотентностью

Доказательство. $\boxed{\text{i}}$ Нетрудно убедиться, что $x \oplus (y \oplus z)$ и $(x \oplus y) \oplus z$ оба равны

$$(x \wedge y \wedge z) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg z)\,.$$

$\boxed{\text{ii}}$ Очевидно.

$\boxed{\text{iii}}$ Ясно, что $x \oplus 0 = (x \wedge \neg 0) \vee (0 \wedge \neg x) = (x \wedge 1) \vee 0 = x$.

$\boxed{\text{iv–vii}}$ Тривиально.

$\boxed{\text{viii}}$ Это проверяется непосредственно:

$$
\begin{aligned}
(x \odot y) \oplus (x \odot z) &= (\neg (x \wedge y) \wedge (x \wedge z)) \vee ((x \wedge y) \wedge \neg (x \wedge z)) \\
&= ((\neg x \vee \neg y) \wedge (x \wedge z)) \vee ((x \wedge y) \wedge (\neg x \vee \neg z)) \\
&= ((\neg x \wedge x \wedge z) \vee (\neg y \wedge x \wedge z)) \vee ((x \wedge y \wedge \neg x) \vee (x \wedge y \wedge \neg z)) \\
&= (0 \vee (\neg y \wedge x \wedge z)) \vee (0 \vee (x \wedge y \wedge \neg z)) \\
&= (\neg y \wedge x \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z) \\
&= x \wedge ((y \wedge \neg z) \vee (z \wedge \neg y)) \\
&= x \odot (y \oplus z).
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{ix}}$ Тривиально. $\square$

Утверждение 3.2

В BA выводимы:

i. $x \wedge y = x \odot y$;

ii. $x \vee y = x \oplus y \oplus (x \odot y)$;

iii. $\neg x = x \oplus 1$.

Доказательство. $\boxed{\text{i}}$ Тривиально.

$\boxed{\text{iii}}$ Это легко проверяется:

$$x \oplus 1 \;=\; (x \wedge \neg 1) \vee (\neg x \wedge 1) \;=\; (x \wedge 0) \vee \neg x \;=\; 0 \vee \neg x \;=\; \neg x.$$

ii Теперь уже нетрудно выразить $\vee$:

$$\begin{aligned}
x \oplus y \oplus (x \odot y) &= x \oplus (y \odot (1 \oplus x)) \\
&= x \oplus (y \wedge \neg x) \\
&= (x \wedge \neg (y \wedge \neg x)) \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg x) \\
&= (x \wedge (\neg y \vee \neg\neg x)) \vee (\neg x \wedge y) \\
&= (x \wedge (\neg y \vee x)) \vee (\neg x \wedge y) \\
&= x \vee (\neg x \wedge y) \\
&= (x \vee \neg x) \wedge (x \vee y) \\
&= 1 \wedge (x \vee y) \\
&= x \vee y.
\end{aligned}$$

$\square$

Обозначим через BR множество, состоящее из:

- аксиом теории колец (не обязательно коммутативных, но с единицей);
- $\forall x\,(x \cdot x = x)$.

Под булевыми — или идемпотентными — кольцами понимаются модели BR.

Утверждение 3.3

В BR выводимы:

i. $x + x = 0$;

ii. $x \cdot y = y \cdot x$.

Доказательство. $\boxed{\text{i}}$ Заметим, что

$$x + y \;=\; (x+y)^2 \;=\; x^2 + xy + yx + y^2 \;=\; x + xy + yx + y,$$

откуда $xy + yx = 0$. В частности, $x^2 + x^2 = 0$, а значит, $x + x = 0$.

$\boxed{\text{ii}}$ Ввиду (i) мы имеем

$$xy \;=\; -yx \;=\; -yx + 0 \;=\; -yx + yx + yx \;=\; yx.$$

$\square$

Упражнение

Пусть $\mathfrak{A}$ — булево кольцо с $|A| \geqslant 3$. Тогда в $\mathfrak{A}$ есть ненулевые делители нуля.

Решение. Пусть a и b — какие-нибудь два различных ненулевых элемента A.

- Пусть $a \cdot b = 0$ (в $\mathfrak{A}$). Тогда a и b оба являются ненулевыми делителями нуля.
- Пусть $a \cdot b \neq 0$ (в $\mathfrak{A}$). Заметим, что

  $$(a \cdot b) \cdot (a + b) \;=\; a \cdot b \cdot a + a \cdot b \cdot b \;=\; a \cdot b + a \cdot b \;=\; 0;$$

  при этом $a + b \neq 0$, так как $a \neq b$. Стало быть, $a \cdot b$ и $a + b$ оба являются ненулевыми делителями нуля.

$\square$

Для каждой булевой алгебры $\mathfrak{B}$ обозначим через $\mathrm{R}\,(\mathfrak{B})$ булево кольцо с носителем B, в котором

$$
\begin{aligned}
0^{\mathrm{R}(\mathfrak{B})} &:= 0,\\
1^{\mathrm{R}(\mathfrak{B})} &:= 1,\\
+^{\mathrm{R}(\mathfrak{B})} &:= \lambda a.\lambda b.\,[a \oplus b],\\
\cdot^{\mathrm{R}(\mathfrak{B})} &:= \lambda a.\lambda b.\,[a \odot b],\\
-^{\mathrm{R}(\mathfrak{B})} &:= \lambda a.\,[a],
\end{aligned}
$$

где 0, 1, $\oplus$ и $\odot$ в правых частях интерпретируются как в $\mathfrak{B}$.

Теорема 3.4

i. Для любых булевых алгебр $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$,

$$\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_2 \iff \mathrm{R}\,(\mathfrak{B}_1) = \mathrm{R}\,(\mathfrak{B}_2).$$

ii. Для каждого булева кольца $\mathfrak{A}$ найдётся булева алгебра $\mathfrak{B}$ такая, что $\mathrm{R}\,(\mathfrak{B}) = \mathfrak{A}$.

Доказательство. $\boxed{\text{i}}$ Как мы знаем, $\wedge$, $\vee$ и $\neg$ однозначно определяются по $\oplus$ и $\odot$; значит, $\mathrm{R}(\mathfrak{B}_1) = \mathrm{R}(\mathfrak{B}_2)$ влечёт $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_2$. Обратная импликация тривиальна.

$\boxed{\text{ii}}$ Пусть $\mathfrak{A}$ — булево кольцо. Рассмотрим σ'-структуру $\mathfrak{B}$ с носителем A, в которой

$$\begin{aligned} 0^{\mathfrak{B}} &:= 0, \\ 1^{\mathfrak{B}} &:= 1, \\ \wedge^{\mathfrak{B}} &:= \lambda a.\lambda b.\,[a \cdot b], \\ \vee^{\mathfrak{B}} &:= \lambda a.\lambda b.\,[a + b + a \cdot b], \\ \neg^{\mathfrak{B}} &:= \lambda a.\,[a + 1], \end{aligned}$$

где 0, 1, $+$ и $\cdot$ в правых частях интерпретируются как в $\mathfrak{A}$. Нетрудно убедиться, что $\mathfrak{B}$ — булева алгебра. Проверим, что $\mathrm{R}(\mathfrak{B}) = \mathfrak{A}$.

- Очевидно, $0^{\mathrm{R}(\mathfrak{B})}$ и $1^{\mathrm{R}(\mathfrak{B})}$ совпадают с $0^{\mathfrak{A}}$ и $1^{\mathfrak{A}}$ соответственно.

- Ясно, что $\cdot^{\mathrm{R}(\mathfrak{B})}$ совпадает с $\cdot^{\mathfrak{A}}$.
- Ясно, что $-^{\mathrm{R}(\mathfrak{B})}$ и $-^{\mathfrak{A}}$ оба совпадают с id_A, т.е. $\lambda a.\,[a]$.
- Для $+$ всё немного сложнее:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{\mathrm{R}(\mathfrak{B})} &= ((a \wedge \neg b) \vee (b \wedge \neg a))^{\mathfrak{B}} \\
&= (a \cdot (b+1) + b \cdot (a+1) + a \cdot (b+1) \cdot b \cdot (a+1))^{\mathfrak{A}} \\
&= \left(a \cdot b + a + b \cdot a + b + a \cdot \left(b^2 + b\right) \cdot (a+1)\right)^{\mathfrak{A}} \\
&= (a + a \cdot b + a \cdot b + b + a \cdot (b+b) \cdot (a+1))^{\mathfrak{A}} \\
&= (a + 0 + b + a \cdot 0 \cdot (a+1))^{\mathfrak{A}} \\
&= (a+b)^{\mathfrak{A}}.
\end{aligned}
$$

  Таким образом, $+^{\mathrm{R}(\mathfrak{B})}$ совпадает с $+^{\mathfrak{A}}$.

$\square$

4. Представление булевых алгебр

Для всякого множества X через $\mathfrak{P}(X)$ мы будем обозначать булеву алгебру с носителем $\mathcal{P}(X)$ и естественной теоретико-множественной интерпретацией. В частности, возьмём

$$\mathbf{1} := \mathfrak{P}(0) \quad \text{и} \quad \mathbf{2} := \mathfrak{P}(1),$$

где 0 и 1 отождествляются с $\varnothing$ и $\{\varnothing\}$ соответственно, как в теории множеств.

Лемма 4.1

$\mathfrak{P}(X) \simeq \mathbf{2}^X$ для любого множества X.

Доказательство. Рассмотрим $\alpha : \mathcal{P}(X) \to 2^X$, действующую по правилу

$$\alpha(Y) := \chi_Y.$$ [5]

Легко убедиться, что α будет искомым изоморфизмом. □

[5] Здесь χ_Y по традиции обозначает характеристическую функцию Y (относительно X).

Пусть $\mathfrak{B}$ — булева алгебра, $a \in B$. Возьмём

$$[0, a] \;:=\; \{b \in B \mid b \leqslant a\}$$

и определим на $[0, a]$ интерпретацию для σ' следующим образом:

- 0 интерпретируется как $0^{\mathfrak{B}}$, а 1 — как a;
- $\wedge$ и $\vee$ интерпретируются как ограничения $\wedge^{\mathfrak{B}}$ и $\vee^{\mathfrak{B}}$ на $[0, a] \times [0, a]$;
- $\neg$ интерпретируется как функция, отображающая $b \in [0, a]$ в $\neg^{\mathfrak{B}} b \wedge^{\mathfrak{B}} a$.

Полученную σ'-структуру обозначим через $\mathfrak{B} \restriction_a$.

Лемма 4.2

Пусть $\mathfrak{B}$ — булева алгебра, $a \in B$. Тогда $\mathfrak{B}\restriction_a$ — тоже булева алгебра.

Доказательство. Простая проверка. $\square$

Лемма 4.3

Пусть $\mathfrak{B}$ — булева алгебра, $a \in B$. Определим $\alpha_a : B \to [0, a]$ по правилу

$$\alpha_a(b) \;:=\; a \wedge b.$$

Тогда α_a — сюрьективный гомоморфизм из $\mathfrak{B}$ на $\mathfrak{B}\restriction_a$.

Доказательство. Простая проверка. $\square$

Теорема 4.4

Пусть $\mathfrak{B}$ — булева алгебра, $a \in B$. Тогда $\mathfrak{B} \simeq \mathfrak{B} \restriction_a \times \mathfrak{B} \restriction_{\neg a}$.

Доказательство. Рассмотрим $\alpha : B \to [0, a] \times [0, \neg a]$, действующую по правилу

$$\alpha(b) \;:=\; (\alpha_a(b), \alpha_{\neg a}(b)) \;=\; (a \wedge b, \neg a \wedge b).$$

Легко убедиться, что α будет искомым изоморфизмом. $\square$

Следствие 4.5

Любая прямо неразложимая булева алгебра изоморфна $\mathbf{1}$ или $\mathbf{2}$.

Доказательство. Разумеется, $\mathbf{1}$ и $\mathbf{2}$ прямо неразложимы.

Пусть $\mathfrak{B}$ — булева алгебра, которая не изоморфна ни $\mathbf{1}$, ни $\mathbf{2}$. Тогда $|B| > 2$, а потому найдётся $a \in B$ такой, что $0 < a < 1$. Более того, $0 < \neg a < 1$. Стало быть,

$$\mathfrak{B}\restriction_a \not\cong \mathbf{1} \quad \text{и} \quad \mathfrak{B}\restriction_{\neg a} \not\cong \mathbf{1}.$$

В силу предыдущей леммы, $\mathfrak{B}$ прямо разложима. □

Следствие 4.6

Пусть $\mathfrak{B}$ — конечная булева алгебра. Тогда существует множество X такое, что $\mathfrak{B} \simeq \mathfrak{P}(X)$.

Доказательство. Из более ранних результатов следует, что $\mathfrak{B}$ изоморфна прямому произведению прямо неразложимых булевых алгебр. Поэтому $\mathfrak{B} \simeq \mathbf{2}^n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Значит, $\mathfrak{B} \simeq \mathfrak{P}(n)$. $\square$

Следствие 4.7

Пусть $\mathfrak{B}$ — булева алгебра. Тогда существует множество X такое, что $\mathfrak{B}$ изоморфна некоторой подалгебре $\mathfrak{P}(X)$, т.е. вкладывается в $\mathfrak{P}(X)$.

Доказательство. Ясно, что любая подпрямо неразложимая булева алгебра изоморфна $\mathbf{1}$ или $\mathbf{2}$. Далее, из более ранних результатов следует, что $\mathfrak{B}$ подпрямо вкладывается в прямое произведение подпрямо неразложимых булевых алгебр. Значит, найдётся множество X такое, что $\mathfrak{B}$ вкладывается в $\mathbf{2}^X$, которая изоморфна $\mathfrak{P}(X)$. □

5. Фильтры и идеалы

Пусть $\mathfrak{L}$ — ограниченная дистрибутивная решётка. $S \subseteq L$ называют фильтром $\mathfrak{L}$, если:

- $1 \in S$;
- для любых $a \in S$ и $b \in S$ верно $a \wedge b \in S$;
- для любых $a \in S$ и $b \in L$, если $b \geqslant a$, то $b \in S$.

Кроме того, $S \subseteq L$ называют идеалом $\mathfrak{L}$, если:

- $0 \in S$;
- для любых $a \in S$ и $b \in S$ верно $a \vee b \in S$;
- для любых $a \in S$ и $b \in L$, если $b \leqslant a$, то $b \in S$.

Под тривиальным фильтром (идеалом) понимают само L. Заметим, что фильтр (идеал) тривиален тогда и только тогда, когда он содержит 0 (соответственно 1).

В частности, мы можем говорить о фильтрах и идеалах булевых алгебр.

Утверждение 5.1

Пусть $\mathfrak{B}$ — булева алгебра. Тогда для любого $S \subseteq B$,

$$S \text{ является идеалом } \mathfrak{B} \iff S \text{ является (кольцевым) идеалом } \mathrm{R}\,(\mathfrak{B}).$$

Решение. Простая проверка. $\square$

Утверждение 5.2

Пусть $\mathfrak{B}$ — булева алгебра. Тогда для любого $S \subseteq B$:

i. S является фильтром, если и только если $\neg[S]$ является идеалом;

ii. S является идеалом, если и только если $\neg[S]$ является фильтром.[6]

Решение. Простая проверка. $\square$

[6]Здесь $\neg[S]$ — полный образ S относительно $\neg$, т.е. $\neg[S] = \{\neg a \mid a \in S\}$.

Упражнение

Пусть $\mathfrak{B}$ — булева алгебра. Для произвольного $S \subseteq B$ положим

$$\mathrm{E}(S) \;:=\; \{(a,b) \in B \times B \mid a \leftrightarrow b \in S\}.$$

Тогда E индуцирует биекцию между фильтрами $\mathfrak{B}$ и конгруэнциями на $\mathfrak{B}$:

a. для всякого $S \subseteq B$, если S — фильтр $\mathfrak{B}$, то $\mathrm{E}(S)$ — конгруэнция;

b. для любых фильтров F_1 и F_2, если $F_1 \neq F_2$, то $\mathrm{E}(F_1) \neq \mathrm{E}(F_2)$;

c. для каждой конгруэнции θ верно $\theta = \mathrm{E}([1]_\theta)$, причём $[1]_\theta$ — фильтр.

Решение. Это можно доказывать напрямую или посредством сведения к случаю колец. Мы пойдём первым путём.

$\boxed{\text{a}}$ Пусть F — фильтр $\mathfrak{B}$. Легко видеть, что $\mathrm{E}(F)$ рефлексивно и симметрично. Проверим его транзитивность.

- Пусть $a \leftrightarrow b \in F$ и $b \leftrightarrow c \in F$. Заметим, что

$$(a \leftrightarrow b) \wedge (b \leftrightarrow c) \ \leqslant \ (a \leftrightarrow c).$$

Поэтому $a \leftrightarrow c$ лежит в F.

Далее, нужно проверить, что $\mathrm{E}\,(F)$ сохраняет все операции.

- Пусть $a_1 \leftrightarrow b_1 \in F$ и $a_2 \leftrightarrow b_2 \in F$. Заметим, что

$$(a_1 \leftrightarrow b_1) \wedge (a_2 \leftrightarrow b_2) \ \leqslant \ (a_1 \wedge a_2) \leftrightarrow (b_1 \wedge b_2),$$
$$(a_1 \leftrightarrow b_1) \wedge (a_2 \leftrightarrow b_2) \ \leqslant \ (a_1 \vee a_2) \leftrightarrow (b_1 \vee b_2).$$

Поэтому $(a_1 \wedge a_2) \leftrightarrow (b_1 \wedge b_2)$ и $(a_1 \vee a_2) \leftrightarrow (b_1 \vee b_2)$ лежат в F.

- Пусть $a \leftrightarrow b \in F$. Заметим, что

$$a \leftrightarrow b \ \leqslant \ \neg a \leftrightarrow \neg b.$$

Поэтому $\neg a \leftrightarrow \neg b$ лежит в F.

Стало быть, $\mathrm{E}\,(F)$ — конгруэнция.

$\boxed{\text{b}}$ Заметим, что если F — фильтр $\mathfrak{B}$, то для каждого $a \in B$,

$$a \ \in \ F \quad \iff \quad a \leftrightarrow 1 \ \in F \quad \iff \quad (a, 1) \ \in \ \mathrm{E}\,(F),$$

т.е. F совпадает с классом эквивалентности 1 по $\mathrm{E}\,(F)$. Поэтому для любых фильтров F_1 и F_2,

$$F_1 \ \neq \ F_2 \quad \Longrightarrow \quad [1]_{\mathrm{E}(F_1)} \ \neq \ [1]_{\mathrm{E}(F_2)} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{E}\,(F_1) \ \neq \ \mathrm{E}\,(F_2).$$

$\boxed{\text{c}}$ Пусть θ — конгруэнция на $\mathfrak{B}$; с целью сокращения мы будем писать F вместо $[1]_\theta$. Проверим, что F является фильтром $\mathfrak{B}$.

- Очевидно, $1 \,\theta\, 1$, т.е. $1 \in F$.
- Пусть $a \,\theta\, 1$ и $b \,\theta\, 1$. Тогда $(a \wedge b) \,\theta\, (1 \wedge 1) = 1$.
- Пусть $a \,\theta\, 1$ и $a \leqslant b$. Тогда $b = (a \vee b) \,\theta\, (1 \vee b) = 1$.

Далее, нужно проверить, что для любых $a, b \in G$,

$$a \ \theta \ b \quad \Longleftrightarrow \quad a \leftrightarrow b \ \in F;$$

при этом $a \leftrightarrow b \in F$ равносильно $\{a \to b, b \to a\} \subseteq F$.

- Пусть $a \ \theta \ b$. Тогда

  $$(\neg a \vee b) \ \ \theta \ \ (\neg a \vee a) \ = \ 1 \quad \text{и} \quad (\neg b \vee a) \ \ \theta \ \ (\neg b \vee b) \ = \ 1.$$

  Значит, $a \to b$ и $b \to a$ лежат в F.

- Пусть $\{a \to b, b \to a\} \subseteq F$. Тогда

  $$\begin{aligned} a \ &= \ (a \wedge 1) \ \ \theta \ \ (a \wedge (\neg a \vee b)) \ = \ 0 \vee (a \wedge b) \ = \ a \wedge b, \\ b \ &= \ (b \wedge 1) \ \ \theta \ \ (b \wedge (\neg b \vee a)) \ = \ 0 \vee (b \wedge a) \ = \ b \wedge a. \end{aligned}$$

  Поэтому $a \ \theta \ b$.

$\square$

Пусть $\mathfrak{B}$ — булева алгебра. В литературе часто используются обозначения

$$\mathfrak{B}/F \;:=\; \mathfrak{B}/\mathrm{E}\,(F) \quad \text{и} \quad \mathfrak{B}/I \;:=\; \mathfrak{B}/\mathrm{E}\,(\neg\,[I]),$$

где F и I суть фильтр $\mathfrak{B}$ и идеал $\mathfrak{B}$ соответственно.

Утверждение 5.3

Пусть $\mathfrak{B}$ — булева алгебра. Тогда множество всех её фильтров (идеалов) замкнуто относительно произвольных пересечений.[7]

Доказательство. Простая проверка. □

[7]Здесь мы считаем, что пересечение пустого множества фильтров (идеалов) $\mathfrak{B}$ равно B.

Пусть $\mathfrak{B}$ — булева алгебра, $X \subseteq B$. Обозначим

$$\begin{aligned} \mathrm{F}_X &:= \text{наименьший фильтр } \mathfrak{B}\text{, включающий } X \\ &= \bigcap \{F \mid F \text{ — фильтр и } X \subseteq F\}. \end{aligned}$$

Его часто называют фильтром, порождённым X. Аналогично можно определить идеал, порождённый X, который мы будем обозначать через I_X.

Утверждение 5.4

Пусть $\mathfrak{B}$ — булева алгебра, $X \subseteq B$. Тогда

$$\mathrm{F}_X = \{a \in B \mid a \geqslant b_0 \wedge \ldots \wedge b_n \text{ для некоторых } b_0, \ldots, b_n \in X\} \cup \{1\}.$$

Аналогично для I_X.

Доказательство. Простая проверка. □

В дальнейшем мы будем работать только с фильтрами, хотя можно было бы продолжить формулировать и доказывать аналогичные результаты для идеалов.

Упражнение

Пусть $\mathfrak{B}$ — булева алгебра. Тогда совокупность всех фильтров $\mathfrak{B}$ образует дистрибутивную решётку по включению, где для любых фильтров F_1 и F_2,

$$\begin{aligned} F_1 \wedge F_2 &:= F_1 \cap F_2, \\ F_1 \vee F_2 &:= \{a \in B \mid a \geqslant a_1 \wedge a_2 \text{ для некоторых } a_1 \in F_1 \text{ и } a_2 \in F_2\}. \end{aligned}$$

Более того, эта решётка изоморфна решётке конгруэнций на $\mathfrak{B}$.

Пусть $\mathfrak{B}$ — булева алгебра. Мы будем говорить, что нетривиальный фильтр F для $\mathfrak{B}$ является ультрафильтром, если для любого $a \in B$ верно $a \in F$ или $\neg a \in F$.

Утверждение 5.5

Пусть $\mathfrak{B}$ — булева алгебра. Для каждого нетривиального фильтра F для $\mathfrak{B}$ следующие условия эквивалентны:

i. F — ультрафильтр $\mathfrak{B}$;

ii. F максимален (по включению) среди нетривиальных фильтров $\mathfrak{B}$;

iii. для любых $a_1, a_2 \in B$, если $a_1 \vee a_2 \in F$, то $a_1 \in F$ или $a_2 \in F$.

Доказательство. $\boxed{\text{iii} \Rightarrow \text{i}}$ Очевидно, $a \vee \neg a = 1 \in F$, а потому $a \in F$ или $\neg a \in F$.

$\boxed{\text{i} \Rightarrow \text{ii}}$ Пусть $F \subsetneq F'$, где F' — нетривиальный фильтр $\mathfrak{B}$. Рассмотрим $a \in F' \setminus F$. По условию $\neg a \in F$. Но тогда $\{a, \neg a\} \subseteq F'$, а потому $0 = a \wedge \neg a \in F'$ — противоречие.

$\boxed{\text{ii} \Rightarrow \text{iii}}$ Пусть $a_1 \notin F$ и $a_2 \notin F$. Возьмём

$$X_1 \; := \; F \cup \{a_1\} \quad \text{и} \quad X_2 \; := \; F \cup \{a_2\}.$$

Ввиду максимальности F среди нетривиальных фильтров F_{X_1} и F_{X_2} оба тривиальны, т.е. $0 \in \mathrm{F}_{X_1} \cap \mathrm{F}_{X_1}$. Стало быть, найдутся $b_1 \in F$ и $b_2 \in F$ такие, что

$$a_1 \wedge b_1 \; = \; 0 \quad \text{и} \quad a_2 \wedge b_2 \; = \; 0.$$

Отсюда $(a_1 \vee a_2) \wedge b_1 \wedge b_2 = (a_1 \wedge b_1 \wedge b_2) \vee (a_2 \wedge b_1 \wedge b_2) = 0$, а потому $a_1 \vee a_1 \notin F$. $\square$

Теорема 5.6

Пусть $\mathfrak{B}$ — булева алгебра, а F — фильтр $\mathfrak{B}$. Тогда для каждого $a \in B \setminus F$ найдётся ультрафильтр U для $\mathfrak{B}$ такой, что $F \subseteq U$ и $a \notin U$.

Доказательство. Пусть $a \in B \setminus F$. Рассмотрим

$$\mathscr{S} \;:=\; \{S \mid S \text{ — фильтр } \mathfrak{B},\; F \subseteq S \text{ и } a \notin S\}.$$

Легко понять, что $\mathscr{S}$ с порядком по включению удовлетворяет условиям леммы Цорна. Стало быть, в $\mathscr{S}$ есть максимальный элемент U. Можно показать, что для любого $b \in B$ верно $b \in U$ или $\neg b \in U$. Значит, U — искомый ультрафильтр. $\square$

Альтернативное доказательство. Возьмём $\kappa := |B|$. Расположим элементы B в трансфинитную последовательность $\langle b_\alpha : \alpha \in \kappa \rangle$ длины κ, т.е.

$$B = \{b_\alpha \mid \alpha \in \kappa\}.$$

Определим $\langle F_\alpha : \alpha \in \kappa \rangle$ по трансфинитной рекурсии следующим образом.

- Если $\alpha = 0$, то $F_\alpha := F$.
- Если $\alpha = \beta + 1$ и $a \in \mathrm{F}\left(F_\beta \cup \{b_\beta\}\right)$, то $F_\alpha := F_\beta$.
- Если $\alpha = \beta + 1$ и $a \notin \mathrm{F}\left(F_\beta \cup \{b_\beta\}\right)$, то $F_\alpha := \mathrm{F}\left(F_\beta \cup \{b_\beta\}\right)$.
- Если α — предельный ординал, то $F_\alpha := \bigcup_{\beta \in \alpha} F_\beta$.

Можно проверить, что $U := \bigcup_{\alpha \in \kappa} F_\alpha$ является искомым ультрафильтром. $\square$

Следствие 5.7

Пусть $\mathfrak{B}$ — булева алгебра. Тогда для любых $a_1, a_2 \in B$, если $a_1 \nleqslant a_2$, то существует ультрафильтр U для $\mathfrak{B}$ такой, что $a_1 \in U$ и $a_2 \notin U$.

Доказательство. Возьмём $F := \mathrm{F}_{\{a_1\}}$ и $a := a_2$ и применим теорему выше. $\square$

Пусть $\mathfrak{B}$ — булева алгебра. Для удобства обозначим через $\mathbb{U}(\mathfrak{B})$ множество всех ультрафильтров $\mathfrak{B}$.

Теорема 5.8: Стоуна, малая

Каждая булева алгебра $\mathfrak{B}$ вкладывается в $\mathfrak{P}(\mathbb{U}(\mathfrak{B}))$.

Доказательство. Определим $\eta : B \to \mathcal{P}(\mathbb{U}(\mathfrak{B}))$ по правилу

$$\eta(a) \;:=\; \{U \in \mathbb{U}(\mathfrak{B}) \mid a \in U\}.$$

Очевидно, $\eta(0) = \varnothing$ и $\eta(1) = \mathbb{U}(\mathfrak{B})$. Далее, покажем, что для любых $a, b \in B$:

$$\begin{aligned} \eta(a \wedge b) &= \eta(a) \cap \eta(b); \\ \eta(a \vee b) &= \eta(a) \cup \eta(b); \\ \eta(\neg a) &= \mathbb{U}(\mathfrak{B}) \setminus \eta(a). \end{aligned}$$

Для случая $\vee$ заметим, что для любого ультрафильтра U для $\mathfrak{B}$,

$$
\begin{aligned}
U \in \eta(a \vee b) \quad &\Longleftrightarrow \quad a \vee b \in U \\
&\Longleftrightarrow \quad a \in U \quad \text{или} \quad b \in U \\
&\Longleftrightarrow \quad U \in \eta(a) \quad \text{или} \quad U \in \eta(b)\,.
\end{aligned}
$$

Аналогично для $\wedge$ и $\neg$, пользуясь свойствами ультрафильтров. Значит, η является гомоморфизмом из $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{P}(\mathbb{U}(\mathfrak{B}))$. Проверим его инъективность:

> Пусть $a \neq b$. Отсюда $a \nleqslant b$ или $b \nleqslant a$. Без ограничения общности мы будем считать, что $a \nleqslant b$. Тогда можно найти ультрафильтр U для $\mathfrak{B}$ такой, что $a \in U$ и $b \notin U$, т.е. $U \in \eta(a) \setminus \eta(b)$. Поэтому $\eta(a) \neq \eta(b)$.

Стало быть, η — вложение. $\square$

Упражнение: на хорошее понимание

Сформулируйте и докажите аналог теоремы 5.8 для ограниченных дистрибутивных решёток, используя «простые» фильтры вместо ультрафильтров.

Теорема 5.9

Каждая конечная булева алгебра $\mathfrak{B}$ изоморфна $\mathfrak{P}(\mathbb{U}(\mathfrak{B}))$.

Доказательство. Остаётся в качестве упражнения. $\square$

6. Дуальность %без доказательств

Пусть X — какое-нибудь множество. Напоминаю, что $\mathscr{X} \subseteq \mathcal{P}(X)$ называют топологией на X, если:

- $\varnothing \in \mathscr{X}$ и $X \in \mathscr{X}$;
- $\mathscr{X}$ замкнуто относительно конечных пересечений;
- $\mathscr{X}$ замкнуто относительно произвольных объединений.[8]

При этом элементы $\mathscr{X}$ играют роль открытых подмножеств X, а их дополнения (относительно X) — замкнутых. Допуская вольность, мы нередко будем использовать термин «топологическое пространство» вместо «топология».

[8]Первое из требований избыточно, если считать $\bigcup \varnothing = \varnothing$ и $\bigcap \varnothing = X$.

Пусть $\mathscr{X}$ — топологическое пространство на X. Говорят, что $S \subseteq \mathscr{X}$ является:

- базой $\mathscr{X}$, если для всякого $O \in \mathscr{X}$ найдётся $S' \subseteq S$ такое, что $\bigcup S' = O$;
- предбазой $\mathscr{X}$, если $\{\bigcap S' \mid S' \subseteq \mathscr{X}$ и S' конечно$\}$ — база $\mathscr{X}$.

Далее, $\mathscr{X}$ называют:

- отделимым (или хаусдорфовым), если для любых $x, y \in X$, если $x \neq y$, то найдутся $O_x, O_y \in \mathscr{X}$ такие, что $x \in O_x$, $y \in O_y$ и $O_x \cap O_y = \varnothing$;
- компактным, если для любого $S \subseteq \mathscr{X}$, если $\bigcup S = X$, то найдётся конечное $S' \subseteq S$ такое, что $\bigcup S' = X$.

Наконец, $\mathscr{X}$ называют булевым пространством, если оно отделимо, компактно и у него есть база, состоящая из открыто-замкнутых подмножеств X.

Для каждой булевой алгебры $\mathfrak{B}$ обозначим через $\mathfrak{B}^*$ топологию на $\mathbb{U}(\mathfrak{B})$ с предбазой (базой) $\{\eta(a) \mid a \in B\}$.

Упражнение

Пусть $\mathfrak{B}$ — булева алгебра. Тогда $\mathfrak{B}^*$ — булево пространство; при этом совокупность всех открыто-замкнутых множеств для $\mathfrak{B}^*$ совпадает с $\{\eta(a) \mid a \in B\}$.

Пусть $\mathscr{X}$ — топологическое пространство на X. Рассмотрим

$$\mathbb{B}(\mathscr{X}) \;:=\; \text{совокупность всех открыто-замкнутых множеств для } \mathscr{X}.$$

Обозначим через $\mathscr{X}^*$ подалгебру $\mathfrak{P}(X)$ с носителем $\mathbb{B}(\mathscr{X})$.

Теорема 6.1: Стоуна, часть 1

Пусть $\mathfrak{B}$ — булева алгебра. Тогда η — изоморфизм из $\mathfrak{B}$ на $\mathfrak{B}^{**}$.

Пусть $\mathscr{X}$ — булево пространство на X. Для каждого $x \in X$ возьмём

$$\xi(x) := \{A \in \mathbb{B}(\mathscr{X}) \mid x \in A\}.$$

Как можно без труда убедиться, все такие $\xi(x)$ являются ультрафильтрами $\mathscr{X}^*$.

Теорема 6.2: Стоуна, часть 2

Пусть $\mathscr{X}$ — булево пространство. Тогда ξ — гомеоморфизм из $\mathscr{X}$ на $\mathscr{X}^{**}$.

Список литературы

[1] S. Burris & H. P. Sankappanavar. A Course in Universal Algebra. Springer, 1981.

[2] S. Givant & P. Halmos. Introduction to Boolean Algebras. Springer, 2009.