Глава 3

Разрешимость и другие фундаментальные свойства

3.1. Метод фильтрации, свойство конечных моделей

Пусть $\mu = \langle W, \leq, v\rangle$ — произвольная модель для Int, а Φ — множество формул языка $\mathcal{L}^{\perp}$, замкнутое относительно подформул, т. е. вместе с каждой формулой множество Φ содержит также все её подформулы.

Определим на W двуместное отношение $\equiv_\Phi$ следующим образом:

$$x \equiv_\Phi y \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\varphi \in \Phi \; (\mu \models_x \varphi \;\Leftrightarrow\; \mu \models_y \varphi),$$

где $x, y \in W$. Ясно, что $\equiv_\Phi$ — эквивалентность на множестве возможных миров W. Обозначим $[x]_\Phi := \{y \in W \mid x \equiv_\Phi y\}$.

Определение 3.1.1. Модель $\mu = \langle W', \leq', v'\rangle$ назовём *фильтрацией модели* $\mu = \langle W, \leq, v\rangle$ *по множеству* $\mathcal{L}^{\perp}$*-формул* Φ, если выполнены следующие условия:

1) $W' = \{[x]_\Phi \mid x \in W\}$;

2) $v'(p) = \{[x]_\Phi \mid x \in v(p) \text{ и } p \in \Phi\}$ для каждого $p \in Prop$;

3) для любых $x, y \in W$, если $x \leq y$, то $[x]_\Phi \leq' [y]_\Phi$;

4) для любых $x, y \in W$, если $[x]_\Phi \leq' [y]_\Phi$, то $\forall\varphi \in \Phi \; (\mu \models_x \varphi \;\Rightarrow\; \mu \models_y \varphi)$.

Заметим, что $v'(p)$ — конус относительно $\leq'$:

> Пусть $[x]_\Phi \leq' [y]_\Phi$ и $[x]_\Phi \in v'(p)$. Ясно, что $x \in v(p)$, т.е. $\mu \models_x p$, откуда $\mu \models_y p$ (ввиду условия 4), т.е. $y \in v(p)$. Стало быть, $[y]_\Phi \in v'(p)$.

При этом $v'(p) = \varnothing$, если $p \notin \Phi$.

Очевидно, W' и v' однозначно задаются условиями 1 и 2. Вместе с тем условия 3 и 4 уже не определяют $\leq'$ однозначным образом. Рассмотрим специальное бинарное отношение $\leq_g$ на W':

$$[x]_\Phi \leq_g [y]_\Phi \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall \varphi \in \Phi \, (\mu \models_x \varphi \;\Rightarrow\; \mu \models_y \varphi).$$

Ясно, что $\leq_g$ является предпорядком на W'. В силу леммы о монотонности, $\leq_g$ удовлетворяет условию 3. Очевидно, условие 4 также выполнено.

Итак, если $\mu = \langle W, \leq, v \rangle$ — модель, а Φ — множество формул языка $\mathcal{L}^\perp$, замкнутое относительно подформул, то модель $\mu_g = \langle W', \leq_g, v' \rangle$, в которой W' и v' заданы как в определении 3.1.1, будет фильтрацией μ по Φ.

Предложение 3.1.2. *Пусть $\mu = \langle W, \leq, v \rangle$ — модель, Φ — множество формул языка $\mathcal{L}^\perp$, замкнутое относительно подформул, $\mu' = \langle W', \leq', v' \rangle$ — фильтрация μ по Φ. Тогда $\leq' \subseteq \leq_g$.*

Доказательство. Тривиально. □

Поэтому μ_g называют *наибольшей фильтрацией μ по Φ*.

Теперь покажем, что переход к фильтрации по множеству формул Φ не влияет на истинность формул из данного множества.

Лемма 3.1.3 (о фильрации). *Пусть $\mu = \langle W, \leq, v \rangle$ — модель, Φ — множество формул языка $\mathcal{L}^\perp$, замкнутое относительно подформул, а $\mu' = \langle W', \leq', v' \rangle$ — фильтрация μ по Φ. Тогда для любых $\varphi \in \Phi$ и $x \in W$,*

$$\mu \models_x \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \mu' \models_{[x]_\Phi} \varphi\,.$$

Доказательство. Индукцией по сложности формулы.

Для $\perp$ утверждение очевидно. Для $p \in \Phi \cap Prop$ мы имеем:

$$\mu \models_x p \quad \Longleftrightarrow \quad x \in v\,(p) \quad \Longleftrightarrow \quad [x]_\Phi \in v'\,(p) \quad \Longleftrightarrow \quad \mu' \models_{[x]_\Phi} p\,.$$

Предположим, что утверждение леммы верно для φ и ψ (и всех $x \in W$). Тогда

$$\mu \models_x \varphi \wedge \psi \quad \Longleftrightarrow \quad \mu \models_x \varphi \text{ и } \mu \models_x \psi \quad \Longleftrightarrow$$
$$\mu' \models_{[x]_\Phi} \varphi \text{ и } \mu' \models_{[x]_\Phi} \psi \quad \Longleftrightarrow \quad \mu' \models_{[x]_\Phi} \varphi \wedge \psi\,,$$

Аналогично для $\varphi \vee \psi$. Осталось разобраться с импликацией:

- Пусть $\mu' \models_{[x]_\Phi} \varphi \to \psi$. Если $x \leq y$ и $\mu \models_y \varphi$, то $\mu' \models_{[y]_\Phi} \varphi$ (ввиду индукционной гипотезы) и $[x]_\Phi \leq' [y]_\Phi$, откуда $\mu' \models_{[y]_\Phi} \psi$, что влечёт $\mu \models_y \psi$ (по индукционной гипотезе). Таким образом, $\mu \models_x \varphi \to \psi$.

- Пусть $\mu' \not\models_{[x]_\Phi} \varphi \to \psi$, т.е. существует $[y]_\Phi$ такой, что

$$[x]_\Phi \leq' [y]_\Phi, \quad \mu' \models_{[y]_\Phi} \varphi \quad \text{и} \quad \mu' \not\models_{[y]_\Phi} \psi.$$

  В силу индукционной гипотезы, $\mu \models_y \varphi$ и $\mu \not\models_y \psi$, а потому $\mu \not\models_y \varphi \to \psi$. Стало быть, $\mu \not\models_x \varphi \to \psi$, в силу условия 4 из определения фильтрации.

□

Теорема 3.1.4. *Int полна относительно класса всех конечных шкал.*

Доказательство. Если $\varphi \in Int$, то φ истинна во всех шкалах, в том числе конечных.

Пусть $\varphi \notin Int$. В силу теоремы о полноте для Int, найдутся модель $\mu = \langle W, \leq, v\rangle$ и $x \in W$ такие, что $\mu \not\models_x \varphi$. Возьмём

$$\Phi \ := \ \text{множество всех подформул формулы } \varphi.$$

Пусть $\mu' = \langle W', \leq', v'\rangle$ — какая-нибудь фильтрация μ по Φ. Тогда $\mu' \not\models_{[x]_\Phi} \varphi$ по лемме о фильтрации. Осталось заметить, что Φ конечно и $|W'| \leq 2^{|\Phi|}$. □

Тут речь идёт именно о слабой полноте. Сильная полнота относительно конечных шкал не имеет места:

Теорема 3.1.5. *Int не сильно полна относительно класса всех конечных шкал.*

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{K}_{fin}$ класс всех конечных шкал. Рассмотрим

$$\Gamma \ := \ \{(p_i \leftrightarrow p_j) \to p_0 \mid i, j > 0,\ i \neq j\}.$$

Проверим, что $\Gamma \models_{\mathcal{K}_{fin}} p_0$, т. е. для любой модели $\mu = \langle W, \leq, v\rangle$, где W — конечно, и всех $x \in W$,

$$\mu \models_x \Gamma \quad \Longrightarrow \quad \mu \models_x p_0.$$

Пусть $\mu = \langle W, \leq, v\rangle$ — произвольная модель над конечной шкалой. Разумеется, $\langle W, \leq\rangle^+$ конечно, а потому найдутся i_0 и j_0 такие, что $i_0 \neq j_0$ и при этом $v(p_{i_0}) = v(p_{j_0})$. Тогда $\mu \models p_{i_0} \leftrightarrow p_{j_0}$. Теперь если $\mu \models_x \Gamma$, то $\mu \models_x (p_{i_0} \leftrightarrow p_{j_0}) \to p_0$, откуда $\mu \models_x p_0$.

Итак, $\Gamma \models_{\mathcal{K}_{fin}} p_0$. Покажем, что $\Gamma \nvdash_{Pos} p_0$. Ввиду сильной полноты Pos относительно класса всех шкал, достаточно найти модель μ_0 и мир x такие, что $\mu_0 \models_x \Gamma$ и $\mu_0 \not\models_x p_0$. Поскольку $\Gamma \models_{\mathcal{K}_{fin}} p_0$, модель μ_0 должна быть бесконечной. Возьмём

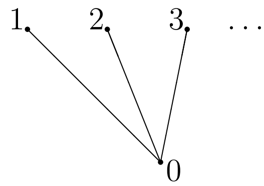
$$\mu_0 \ := \ \langle \omega, \leq_0, v_0\rangle,$$

где ω — множество всех натуральных чисел, а $\leq_0$ и v_0 определяются так:

$$\leq_0 \ := \ \{(i,i) \mid i \in \omega\} \cup \{(0,i) \mid i \in \omega \setminus \{0\}\};$$

$$v_0(p_0) \ := \ \omega \setminus \{0\} \quad \text{и} \quad v_0(p_i) \ := \ \{i\} \ \text{ при } \ i > 0.$$

Графически предпорядок $\leq_0$ можно изобразить так:



Проверим, что $\mu_0 \models_0 \Gamma$. Если $i = 0$, то, как легко понять, для всех пар j, k,

$$j \neq k \quad \Longrightarrow \quad \mu_0 \not\models_i p_j \leftrightarrow p_k .$$

Если же $i > 0$, то $\mu_0 \models_i p_0$. Стало быть, $\mu_0 \models_0 \Gamma$. Вместе с тем $\mu_0 \not\models_0 p_0$. □

Логику L из $\mathcal{E}Int$ называют *табличной*, если $L\mathcal{W} = L$ для какой-нибудь конечной шкалы $\mathcal{W}$. Интересно, что:

Теорема 3.1.6 (W. Dziobiak, 1980). *$L \in \mathcal{E}Int$ сильно полна относительно некоторого класса конечных шкал, если и только если L таблична.*

Упражнение 3.1.7. *Int не является табличной.*

Подсказка. Рассмотрите формулы

$$\mathbf{bc}_n \;:=\; p_0 \vee (p_0 \to p_1) \vee \ldots \vee ((p_0 \wedge \ldots \wedge p_{n-1}) \to p_n)\,, \quad n \in \omega \setminus \{0\}\,,$$

и докажите, что для острой шкалы $\mathcal{W} = \langle W, \leq \rangle$, являющейся частичным порядком, верна эквивалентность

$$\mathcal{W} \models \mathbf{bc}_n \quad \Longleftrightarrow \quad |W| \leq n\,.$$

Логику L из $\mathcal{E}Int$ называют *финитно аппроксимируемой*, если для любой формулы $\varphi \notin L$ (в языке $\mathcal{L}^{\perp}$) найдется конечная шкала $\mathcal{W}$ со свойствами: $\mathcal{W} \models L$ и $\mathcal{W} \not\models \varphi$. В этом случае (и аналогичных ему) ещё говорят, что соответствующая логика L обладает *свойством конечных моделей*: любая формула рассматриваемого языка, не являющаяся теоремой L, опровергается в некоторой конечной модели логики L.

Предложение 3.1.8. *Если логика L из $\mathcal{E}Int$ перечислима и финитно аппроксимируема, и класс её конечных моделей перечислим, то L разрешима.*

Доказательство. Очевидно, что для любой конечной шкалы $\mathcal{W}$ и формулы φ за конечное число шагов можно эффективно проверить, верно ли $\mathcal{W} \models \varphi$. Поэтому перечислимость класса конечных моделей вместе с финитной аппроксимируемостью позволяют построить перечисление формул, не лежащих в данной логике. Остаётся только применить теорему Поста. □

Следствие 3.1.9. *Int разрешима.*

Пусть L — финитно аппроксимируемая логика. Её *функция сложности* f_L (действующая на ω) определяется следующим образом:

$$f_L\,(n)\ :=\ \max_{lh(\varphi)\le n,\ \varphi\notin L}\ \min_{\mathcal{W}\models L,\ \mathcal{W}\not\models\varphi}|\mathcal{W}|\ ,$$

где $lh(\varphi)$ — длина формулы φ.

Говорим, что логика L *экспоненциально* (соответственно *полиномиально*, или *линейно*) аппроксимируема, если существует константа c, для которой выполнено

$$f_L\,(n) \le 2^{c\cdot n}\quad (\,f_L\,(n) \le n^c\,,\ \text{ или }\ f_L\,(n) \le c\cdot n\,)\qquad\text{при всех }\ n\in\omega\,.$$

Из доказательства теоремы 3.1.4 мы получаем:

Следствие 3.1.10. *Int экспоненцильно аппроксимируема.*

Вместе с тем имеет место:

Теорема 3.1.11. *Логика Int не является полиномиально аппроксимируемой.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность формул

$$\beta_n\ :=\ \bigwedge_{i=1}^{n-1}(((\neg p_{i+1}\to q_{i+1})\vee(p_{i+1}\to q_{i+1}))\to q_i)\ \to\ ((\neg p_1\to q_1)\vee(p_1\to q_1))\,.$$

Очевидно, что $lh\,(\beta_n) = O\,(n)$. Для доказательства теоремы будет достаточно установить, что шкала, на которой опровергается формула β_n, содержит не менее 2^n миров.

Пусть $\mu = \langle W,\le,v\rangle$ и $x\in W$ таковы, что

$$\mu\models_x((\neg p_{i+1}\to q_{i+1})\vee(p_{i+1}\to q_{i+1}))\to q_i\quad\text{при }\ i\in\{1,\ldots,n-1\}\,;$$
$$\mu\not\models_x(\neg p_1\to q_1)\vee(p_1\to q_1)\,.$$

Последнее условие влечёт существование миров x_0 и x_1 (из W) таких, что $x\le x_0,x_1$ и

$$\mu\models_{x_0}p_1\,,\quad \mu\not\models_{x_0}q_1\,;\qquad \mu\models_{x_1}\neg p_1\,,\quad \mu\not\models_{x_1}q_1\,.$$

Из $\mu\models_{x_0}p_1$ и $\mu\models_{x_1}\neg p_1$ вытекает, что миры x_0 и x_1 не имеют общих последователей. А из $\mu\not\models_{x_i}q_1$, $i\in\{0,1\}$, следует

$$\mu\not\models_{x_i}(\neg p_2\to q_2)\vee(p_2\to q_2)\,.$$

Это, в свою очередь, означает, что найдутся миры $x_{00},x_{01}\ge x_0$ и $x_{10},x_{11}\ge x_1$, удовлетворяющие соотношениям:

$$\mu\models_{x_{00}}p_2\,,\quad \mu\not\models_{x_{00}}q_2\,;\qquad \mu\models_{x_{01}}\neg p_2\,,\quad \mu\not\models_{x_{01}}q_2\,;$$
$$\mu\models_{x_{10}}p_2\,,\quad \mu\not\models_{x_{10}}q_2\,;\qquad \mu\models_{x_{11}}\neg p_2\,,\quad \mu\not\models_{x_{11}}q_2\,.$$

При этом x_{00} и x_{01} не имеют общих последователей, и также x_{10} и x_{11} не имеют общих последователей. Продолжая данный процесс, мы получим полное бинарное дерево глубины n, состоящее из различных миров модели μ. $\square$

Последняя из теорем допускает следующее нетривиальное обобщение.

Теорема 3.1.12. *Любая нетривиальная логика $L \in \mathcal{E}Int$, обладающая дизъюнктивным свойством, не является полиномиально аппроксимируемой.*

[...]