

Исчисление Ламбека

Илья Ольховский

11.09.2020

Мотивировка

Хотим анализировать естественные и искусственные языки.

Мотивировка

Хотим анализировать естественные и искусственные языки.

Σ — фиксированный не более чем счётный алфавит.

Элементы Σ — **слова** некоторого языка.

Мотивировка

Хотим анализировать естественные и искусственные языки.

Σ — фиксированный не более чем счётный алфавит.
Элементы Σ — **слова** некоторого языка.

Дано: строка $w \in \Sigma^*$ (предложение).

Мотивировка

Хотим анализировать естественные и искусственные языки.

Σ — фиксированный не более чем счётный алфавит.
Элементы Σ — **слова** некоторого языка.

Дано: строка $w \in \Sigma^*$ (предложение).

Задача:

Мотивировка

Хотим анализировать естественные и искусственные языки.

Σ — фиксированный не более чем счётный алфавит.
Элементы Σ — **слова** некоторого языка.

Дано: строка $w \in \Sigma^*$ (предложение).

Задача:

- Проверить, что w — грамматически правильное предложение (**синтаксис**).

Мотивировка

Хотим анализировать естественные и искусственные языки.

Σ — фиксированный не более чем счётный алфавит.
Элементы Σ — **слова** некоторого языка.

Дано: строка $w \in \Sigma^*$ (предложение).

Задача:

- Проверить, что w — грамматически правильное предложение (**синтаксис**).
- Понять, что говорится в w (**семантика**).

λ -исчисление

John loves Mary.

λ -исчисление

John loves Mary.

Каждому слову сопоставляется семантический тип:

λ -исчисление

John loves Mary.

Каждому слову сопоставляется семантический тип:

- *John, Mary* $\in e$ — некая сущность (entity).

λ -исчисление

John loves Mary.

Каждому слову сопоставляется семантический тип:

- *John, Mary* $\in e$ — некая сущность (entity).
- *loves*: $e \times e \rightarrow t$ — функция из $e \times e$ в некоторое множество истинностных значений t . Как правило $t = \{0, 1\}$.

λ -исчисление

John loves Mary.

Каждому слову сопоставляется семантический тип:

- *John, Mary* $\in e$ — некая сущность (entity).
- *loves*: $e \times e \rightarrow t$ — функция из $e \times e$ в некоторое множество истинностных значений t . Как правило $t = \{0, 1\}$.

Предложение есть **терм**.

λ -исчисление

$$\text{John loves Mary.} \implies \underbrace{\underbrace{\text{loves}}_{e \times e \rightarrow t} \left(\underbrace{\text{John}}_e, \underbrace{\text{Mary}}_e \right)}_t$$

Каждому слову сопоставляется семантический тип:

- $\text{John}, \text{Mary} \in e$ — некая сущность (entity).
- $\text{loves}: e \times e \rightarrow t$ — функция из $e \times e$ в некоторое множество истинностных значений t . Как правило $t = \{0, 1\}$.

Предложение есть **терм**.

The girl whom John loves hates John.

Семантические типы.

The girl whom John loves hates John.

Семантические типы.

- *The*: $(e \rightarrow t) \rightarrow e$.

The girl whom John loves hates John.

Семантические типы.

- *The*: $(e \rightarrow t) \rightarrow e$.
- *girl*: $e \rightarrow t$.

λ -исчисление

The girl whom John loves hates John.

Семантические типы.

- *The*: $(e \rightarrow t) \rightarrow e$.
- *girl*: $e \rightarrow t$.
- *whom*: $[(e \rightarrow t) \times (e \rightarrow t)] \rightarrow (e \rightarrow t)$.

λ -исчисление

The girl whom John loves hates John.

Семантические типы.

- *The*: $(e \rightarrow t) \rightarrow e$.
- *girl*: $e \rightarrow t$.
- *whom*: $[(e \rightarrow t) \times (e \rightarrow t)] \rightarrow (e \rightarrow t)$.
- *John* $\in e$.

λ -исчисление

The girl whom John loves hates John.

Семантические типы.

- *The*: $(e \rightarrow t) \rightarrow e$.
- *girl*: $e \rightarrow t$.
- *whom*: $[(e \rightarrow t) \times (e \rightarrow t)] \rightarrow (e \rightarrow t)$.
- *John* $\in e$.
- *loves, hates*: $e \times e \rightarrow t$.

λ -исчисление

The girl whom John loves hates John.

Семантические типы.

- *The*: $(e \rightarrow t) \rightarrow e$.
- *girl*: $e \rightarrow t$.
- *whom*: $[(e \rightarrow t) \times (e \rightarrow t)] \rightarrow (e \rightarrow t)$.
- *John* $\in e$.
- *loves, hates*: $e \times e \rightarrow t$.

The girl whom $\underbrace{\text{John}}_e$ $\underbrace{\text{loves}}_{e \times e \rightarrow t}$ *hates John.*

λ -исчисление

The girl whom John loves hates John.

Семантические типы.

- *The*: $(e \rightarrow t) \rightarrow e$.
- *girl*: $e \rightarrow t$.
- *whom*: $[(e \rightarrow t) \times (e \rightarrow t)] \rightarrow (e \rightarrow t)$.
- *John* $\in e$.
- *loves, hates*: $e \times e \rightarrow t$.

The girl whom $\underbrace{\text{loves}(\text{John}, \cdot)}_{e \rightarrow t}$ hates John.

λ -исчисление

The girl whom John loves hates John.

Семантические типы.

- *The*: $(e \rightarrow t) \rightarrow e$.
- *girl*: $e \rightarrow t$.
- *whom*: $[(e \rightarrow t) \times (e \rightarrow t)] \rightarrow (e \rightarrow t)$.
- *John* $\in e$.
- *loves, hates*: $e \times e \rightarrow t$.

The $\underbrace{\textit{girl}}_{e \rightarrow t}$ $\underbrace{\textit{whom}}_{[(e \rightarrow t) \times (e \rightarrow t)] \rightarrow (e \rightarrow t)}$ $\underbrace{\textit{loves}(\textit{John}, \cdot)}_{e \rightarrow t}$ *hates John.*

λ -исчисление

The girl whom John loves hates John.

Семантические типы.

- *The*: $(e \rightarrow t) \rightarrow e$.
- *girl*: $e \rightarrow t$.
- *whom*: $[(e \rightarrow t) \times (e \rightarrow t)] \rightarrow (e \rightarrow t)$.
- *John* $\in e$.
- *loves, hates*: $e \times e \rightarrow t$.

The $\underbrace{\text{whom}(\text{girl}, \text{loves}(\text{John}, \cdot))}_{e \rightarrow t}$ *hates John.*

λ -исчисление

The girl whom John loves hates John.

Семантические типы.

- *The*: $(e \rightarrow t) \rightarrow e$.
- *girl*: $e \rightarrow t$.
- *whom*: $[(e \rightarrow t) \times (e \rightarrow t)] \rightarrow (e \rightarrow t)$.
- *John* $\in e$.
- *loves, hates*: $e \times e \rightarrow t$.

$\underbrace{\textit{The}}_{(e \rightarrow t) \rightarrow e} \underbrace{\textit{whom}(\textit{girl}, \textit{loves}(\textit{John}, \cdot))}_{e \rightarrow t} \textit{hates John.}$

λ -исчисление

The girl whom John loves hates John.

Семантические типы.

- *The*: $(e \rightarrow t) \rightarrow e$.
- *girl*: $e \rightarrow t$.
- *whom*: $[(e \rightarrow t) \times (e \rightarrow t)] \rightarrow (e \rightarrow t)$.
- *John* $\in e$.
- *loves, hates*: $e \times e \rightarrow t$.

$\underbrace{\textit{The}(\textit{whom}(\textit{girl}, \textit{loves}(\textit{John}, \cdot)))}_e \textit{ hates John.}$

λ -исчисление

The girl whom John loves hates John.

Семантические типы.

- *The*: $(e \rightarrow t) \rightarrow e$.
- *girl*: $e \rightarrow t$.
- *whom*: $[(e \rightarrow t) \times (e \rightarrow t)] \rightarrow (e \rightarrow t)$.
- *John* $\in e$.
- *loves, hates*: $e \times e \rightarrow t$.

$$\underbrace{\textit{The}(\textit{whom}(\textit{girl}, \textit{loves}(\textit{John}, \cdot)))}_{e} \quad \underbrace{\textit{hates}}_{e \times e \rightarrow t} \quad \underbrace{\textit{John}}_e .$$

λ -исчисление

The girl whom John loves hates John.

Семантические типы.

- *The*: $(e \rightarrow t) \rightarrow e$.
- *girl*: $e \rightarrow t$.
- *whom*: $[(e \rightarrow t) \times (e \rightarrow t)] \rightarrow (e \rightarrow t)$.
- *John* $\in e$.
- *loves, hates*: $e \times e \rightarrow t$.

$\underbrace{\text{hates}(\text{The}(\text{whom}(\text{girl}, \text{loves}(\text{John}, \cdot))), \text{John})}_{t}$.

Исчисление Ламбека: демагогия

Операции над языками:

Исчисление Ламбека: демагогия

Операции над языками:

- $M \cdot N = \{ w_1 w_2 \mid w_1 \in M, w_2 \in N \}$

Исчисление Ламбека: демагогия

Операции над языками:

- $M \cdot N = \{ w_1 w_2 \mid w_1 \in M, w_2 \in N \}$
- $M \setminus N = \{ w_2 \mid \forall w_1 \in M, w_1 w_2 \in N \}$

Исчисление Ламбека: демагогия

Операции над языками:

- $M \cdot N = \{ w_1 w_2 \mid w_1 \in M, w_2 \in N \}$
- $M \setminus N = \{ w_2 \mid \forall w_1 \in M, w_1 w_2 \in N \}$
- $N / M = \{ w_1 \mid \forall w_2 \in M, w_1 w_2 \in N \}$

Исчисление Ламбека: демагогия

Операции над языками:

- $M \cdot N = \{ w_1 w_2 \mid w_1 \in M, w_2 \in N \}$
- $M \setminus N = \{ w_2 \mid \forall w_1 \in M, w_1 w_2 \in N \}$
- $N / M = \{ w_1 \mid \forall w_2 \in M, w_1 w_2 \in N \}$

Свойства:

Исчисление Ламбека: демагогия

Операции над языками:

- $M \cdot N = \{ w_1 w_2 \mid w_1 \in M, w_2 \in N \}$
- $M \setminus N = \{ w_2 \mid \forall w_1 \in M, w_1 w_2 \in N \}$
- $N / M = \{ w_1 \mid \forall w_2 \in M, w_1 w_2 \in N \}$

Свойства:

- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

Исчисление Ламбека: демагогия

Операции над языками:

- $M \cdot N = \{ w_1 w_2 \mid w_1 \in M, w_2 \in N \}$
- $M \setminus N = \{ w_2 \mid \forall w_1 \in M, w_1 w_2 \in N \}$
- $N / M = \{ w_1 \mid \forall w_2 \in M, w_1 w_2 \in N \}$

Свойства:

- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- $A \subseteq B, B \subseteq C \implies A \subseteq C$

Исчисление Ламбека: демагогия

Операции над языками:

- $M \cdot N = \{ w_1 w_2 \mid w_1 \in M, w_2 \in N \}$
- $M \setminus N = \{ w_2 \mid \forall w_1 \in M, w_1 w_2 \in N \}$
- $N / M = \{ w_1 \mid \forall w_2 \in M, w_1 w_2 \in N \}$

Свойства:

- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- $A \subseteq B, B \subseteq C \implies A \subseteq C$
- $A \cdot B \subseteq C \iff B \subseteq A \setminus C$

Исчисление Ламбека: демагогия

Операции над языками:

- $M \cdot N = \{ w_1 w_2 \mid w_1 \in M, w_2 \in N \}$
- $M \setminus N = \{ w_2 \mid \forall w_1 \in M, w_1 w_2 \in N \}$
- $N / M = \{ w_1 \mid \forall w_2 \in M, w_1 w_2 \in N \}$

Свойства:

- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- $A \subseteq B, B \subseteq C \implies A \subseteq C$
- $A \cdot B \subseteq C \iff B \subseteq A \setminus C$
- $A \cdot B \subseteq C \iff A \subseteq C / B$

Исчисление Ламбека: демагогия

Примитивные синтаксические типы:

Исчисление Ламбека: демагогия

Примитивные синтаксические типы:

- n — имя без артикля: *cat*, *girl*.

Исчисление Ламбека: демагогия

Примитивные синтаксические типы:

- n — имя без артикля: *cat, girl*.
- np — именная группа: *John, the cat, a girl*.

Исчисление Ламбека: демагогия

Примитивные синтаксические типы:

- n — имя без артикля: *cat, girl*.
- np — именная группа: *John, the cat, a girl*.
- s — предложение: *John loves Mary, the cat drinks milk*

Исчисление Ламбека: демагогия

Примитивные синтаксические типы:

- n — имя без артикля: *cat, girl*.
- np — именная группа: *John, the cat, a girl*.
- s — предложение: *John loves Mary, the cat drinks milk*

Производные синтаксические типы получаются с помощью $\cdot, \backslash, /$:

Исчисление Ламбека: демагогия

Примитивные синтаксические типы:

- n — имя без артикля: *cat, girl*.
- np — именная группа: *John, the cat, a girl*.
- s — предложение: *John loves Mary, the cat drinks milk*

Производные синтаксические типы получаются с помощью $\cdot, \backslash, /$:

$$\bullet \underbrace{\textit{The}}_{np/n} \underbrace{\textit{cat}}_n \implies \underbrace{\textit{The cat}}_{np}$$

Исчисление Ламбека: демагогия

Примитивные синтаксические типы:

- n — имя без артикля: *cat*, *girl*.
- np — именная группа: *John*, *the cat*, *a girl*.
- s — предложение: *John loves Mary*, *the cat drinks milk*

Производные синтаксические типы получаются с помощью \cdot , \backslash , $/$:

- $\underbrace{\textit{The}}_{np/n} \underbrace{\textit{cat}}_n \implies \underbrace{\textit{The cat}}_{np}$
- $\underbrace{\textit{Beautiful}}_{n/n} \underbrace{\textit{girl}}_n \implies \underbrace{\textit{Beautiful girl}}_n$

Исчисление Ламбека: демагогия

Примитивные синтаксические типы:

- n — имя без артикля: *cat*, *girl*.
- np — именная группа: *John*, *the cat*, *a girl*.
- s — предложение: *John loves Mary*, *the cat drinks milk*

Производные синтаксические типы получаются с помощью \cdot , \backslash , $/$:

- $\underbrace{\textit{The}}_{np/n} \underbrace{\textit{cat}}_n \implies \underbrace{\textit{The cat}}_{np}$
- $\underbrace{\textit{Beautiful}}_{n/n} \underbrace{\textit{girl}}_n \implies \underbrace{\textit{Beautiful girl}}_n$
- $\underbrace{\textit{Mary}}_{np} \underbrace{\textit{sleeps}}_{np \backslash s} \implies \underbrace{\textit{Mary sleeps}}_s$

Исчисление Ламбека: демагогия

Задача исчисления Ламбека:

Исчисление Ламбека: демагогия

Задача исчисления Ламбека:

- Дано предложение, каждому слову сопоставлен некоторый синтаксический тип.

Исчисление Ламбека: демагогия

Задача исчисления Ламбека:

- Дано предложение, каждому слову сопоставлен некоторый синтаксический тип.
- Проверить, что всё предложение имеет тип s .

Исчисление Ламбека: демагогия

Задача исчисления Ламбека:

- Дано предложение, каждому слову сопоставлен некоторый синтаксический тип.
- Проверить, что всё предложение имеет тип s .

Пример:

Исчисление Ламбека: демагогия

Задача исчисления Ламбека:

- Дано предложение, каждому слову сопоставлен некоторый синтаксический тип.
- Проверить, что всё предложение имеет тип s .

Пример:

$$\underbrace{\textit{Mary}}_{np} \quad \underbrace{\textit{likes}}_{np \setminus s / np} \quad \underbrace{\textit{fresh}}_{np / np} \quad \underbrace{\textit{milk}}_{np}$$

Исчисление Ламбека: демагогия

Задача исчисления Ламбека:

- Дано предложение, каждому слову сопоставлен некоторый синтаксический тип.
- Проверить, что всё предложение имеет тип s .

Пример:

$$\underbrace{\textit{Mary}}_{np} \quad \underbrace{\textit{likes}}_{np \backslash s / np} \quad \underbrace{\textit{fresh}}_{np / np} \quad \underbrace{\textit{milk}}_{np}$$

$$(np / np) \cdot np \subseteq np$$

Исчисление Ламбека: демагогия

Задача исчисления Ламбека:

- Дано предложение, каждому слову сопоставлен некоторый синтаксический тип.
- Проверить, что всё предложение имеет тип s .

Пример:

$\underbrace{\textit{Mary}}_{np} \quad \underbrace{\textit{likes}}_{np \setminus s / np} \quad \underbrace{\textit{fresh milk}}_{np}$

$$(np / np) \cdot np \subseteq np$$

Исчисление Ламбека: демагогия

Задача исчисления Ламбека:

- Дано предложение, каждому слову сопоставлен некоторый синтаксический тип.
- Проверить, что всё предложение имеет тип s .

Пример:

$$\underbrace{\textit{Mary}}_{np} \quad \underbrace{\textit{likes}}_{np \backslash s / np} \quad \underbrace{\textit{fresh milk}}_{np}$$

$$[(np \backslash s) / np] \cdot np \subseteq np \backslash s$$

Исчисление Ламбека: демагогия

Задача исчисления Ламбека:

- Дано предложение, каждому слову сопоставлен некоторый синтаксический тип.
- Проверить, что всё предложение имеет тип s .

Пример:

$\underbrace{\textit{Mary}}_{np} \quad \underbrace{\textit{likes fresh milk}}_{np \setminus s}$

$$[(np \setminus s) / np] \cdot np \subseteq np \setminus s$$

Исчисление Ламбека: демагогия

Задача исчисления Ламбека:

- Дано предложение, каждому слову сопоставлен некоторый синтаксический тип.
- Проверить, что всё предложение имеет тип s .

Пример:

$\underbrace{\textit{Mary}}_{np} \quad \underbrace{\textit{likes fresh milk}}_{np \setminus s}$

$$np \cdot (np \setminus s) \subseteq s$$

Исчисление Ламбека: демагогия

Задача исчисления Ламбека:

- Дано предложение, каждому слову сопоставлен некоторый синтаксический тип.
- Проверить, что всё предложение имеет тип s .

Пример:

Mary likes fresh milk
└──────────────────────────┘
 s

$$np \cdot (np \backslash s) \subseteq s$$

Исчисление Ламбека: определение

Исчисление Ламбека: определение

- A, B, C, \dots — счётное множество *примитивных типов*.

Исчисление Ламбека: определение

- A, B, C, \dots — счётное множество *примитивных типов*.
- Операции: $\{ \cdot, \backslash, / \}$.

Исчисление Ламбека: определение

- A, B, C, \dots — счётное множество *примитивных типов*.
- Операции: $\{\cdot, \backslash, / \}$.
- Аксиомы: $\varphi \rightarrow \varphi$

Исчисление Ламбека: определение

- A, B, C, \dots — счётное множество *примитивных типов*.
- Операции: $\{\cdot, \backslash, / \}$.
- Аксиомы: $\varphi \rightarrow \varphi$
- Правила вывода:

$$\frac{\varphi \cdot \alpha \rightarrow \beta}{\varphi \rightarrow \beta/\alpha} \quad \frac{\alpha \cdot \varphi \rightarrow \beta}{\varphi \rightarrow \alpha \backslash \beta}$$
$$\frac{\varphi \rightarrow \alpha, \theta_1 \cdot \beta \cdot \theta_2 \rightarrow \gamma}{\theta_1 \cdot \beta/\alpha \cdot \varphi \cdot \theta_2 \rightarrow \gamma} \quad \frac{\varphi \rightarrow \alpha, \theta_1 \cdot \beta \cdot \theta_2 \rightarrow \gamma}{\theta_1 \cdot \varphi \cdot \alpha \backslash \beta \cdot \theta_2 \rightarrow \gamma}$$

Надо же хоть что-то сформулировать

Разрешимость

Проверка выводимости в исчислении Ламбека — задача из NP .

Полнота

Если утверждение $L(\varphi) \subseteq L(\psi)$ верно для любого алфавита Σ и для любых значений примитивных типов, то $\varphi \rightarrow \psi$ выводится в исчислении Ламбека.

Надо же хоть что-то доказать

Доказательство полноты при отсутствии конкатенации.

$\Sigma : A, B, \dots$ — алфавит, соответствующий примитивным типам.

\hat{A}, \hat{B}, \dots — «мета» примитивные типы.

$$L(\hat{A}) = \{ \varphi \mid \varphi \xrightarrow{LA} A \}$$

Утверждение

$$\hat{\varphi} \xrightarrow{LA} \hat{\psi} \iff L(\hat{\varphi}) \subseteq L(\hat{\psi})$$

Надо же хоть что-то доказать

Индукция по построению ψ .

Надо же хоть что-то доказать

Индукция по построению ψ .
База $\psi = \hat{A}$.

Надо же хоть что-то доказать

Индукция по построению ψ .

База $\psi = \hat{A}$.

Переход.

Надо же хоть что-то доказать

Индукция по построению ψ .

База $\psi = \hat{A}$.

Переход.

Пусть $\psi = \alpha \setminus \beta$ и $L(\varphi) \subseteq L(\alpha \setminus \beta)$.

Надо же хоть что-то доказать

Индукция по построению ψ .

База $\psi = \hat{A}$.

Переход.

Пусть $\psi = \alpha \setminus \beta$ и $L(\varphi) \subseteq L(\alpha \setminus \beta)$.

Тогда $L(\alpha\varphi) \subseteq L(\beta)$.

Надо же хоть что-то доказать

Индукция по построению ψ .

База $\psi = \hat{A}$.

Переход.

Пусть $\psi = \alpha \setminus \beta$ и $L(\varphi) \subseteq L(\alpha \setminus \beta)$.

Тогда $L(\alpha\varphi) \subseteq L(\beta)$.

По индукционному предположению $\alpha\varphi \xrightarrow{LA} \beta$.

Надо же хоть что-то доказать

Индукция по построению ψ .

База $\psi = \hat{A}$.

Переход.

Пусть $\psi = \alpha \setminus \beta$ и $L(\varphi) \subseteq L(\alpha \setminus \beta)$.

Тогда $L(\alpha\varphi) \subseteq L(\beta)$.

По индукционному предположению $\alpha\varphi \xrightarrow{LA} \beta$.

Тогда $\varphi \xrightarrow{LA} \alpha \setminus \beta$.