Рассуждения о линейных неравенствах

Милов Артём

СПБГУ МКН

2 октября, 2020

Введение и базовые определения

Раз и навсегда зафиксируем некоторое бесконечное множество. Его элементы назовём переменными.

Терм — это строка $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_kx_k$, где $a_1, a_2, \dots, a_k$ — целые числа, $x_1, x_2, \dots, x_k$ — переменные, $k \geq 1$.

Примитивное неравенство — это $t \geq c$, где t — терм, а c — целое число.

Неравенство — любая булева комбинация примитивных неравенств.

Введение и базовые определения

Формализуем рассуждения о линейных неравенствах.
Как и прежде у нас есть аксиомы и правила вывода. Кроме MP никаких других правил вывода использоваться не будет.

Система аксиом — некоторое множество неравенств.

f — доказуема, если есть последовательность неравенств, заканчивающаяся f, каждая из которых либо аксиома, либо получается из предыдущих по правилу вывода.

Введение и базовые определения

Нам надо дать определение выводимости для неравенств, для этого рассмотрим следующую конструкцию.

Означиванием переменных назовём произвольную функцию из множества переменных на $\mathbb{R}$.

Пусть A — означивание переменных, будем писать, что

$$A \models a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_kx_k \geq c$$

если

$$a_1A(x_1) + a_2A(x_2) + \cdots + a_kA()x_k) \geq c$$

Очевидно, как определённую таким образом семантику доопределить на все неравенства.

Введение и базовые определения

Будем говорить, что неравенство f выполнимо, если найдётся означивание $A : A \models f$. Если же $A \models f$ для любого A, то назовём такое f — общезначимым.

f — противоречива, если $\neg f$ доказуема.
f — непротиворечива, если иначе.

Система аксиом называется:
Корректной — если каждое доказуемое в ней неравенство общезначимо.
Полной — если любое общезначимое неравенство доказуемо (или если любое непротиворечивое неравенство выполнимо).

Введение и базовые определения

Было бы очень хорошо, если бы мы знали какую-либо полную и корректную систему аксиом.

Как выяснилось, такая система аксиом есть и зовётся она AX_{INEQ}.

Мы определим её и докажем полноту и корректность.

AX_{INEQ}

Наша система аксиом состоит из двух частей. Первая из них отвечает за "пропозициональные рассуждения".

Taut. Все подстановки пропозициональных тавтологий.

То есть, если имеется какая-либо тавтология, то результат, полученный при замене всех пропозициональных переменных на неравенства, будет аксиомой. Например...

$$((2x + y \geq 3) \wedge (z \geq 17)) \rightarrow (z \geq 17)$$

Так как $(p \wedge q) \rightarrow q$ — тавтология.

AX_{INEQ}

Вторая же часть отвечает за рассуждения о линейных неравенствах.

I_1. $x \geq x \quad (x - x \geq 0)$

I_2. $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \geq c \leftrightarrow$
$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + 0x_{n+1} \geq c$

I_3. $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \geq c \leftrightarrow$
$a_{j_1}x_{j_1} + a_{j_2}x_{j_2} + \cdots + a_{j_n}x_{j_n} \geq c$,
где $\{j_1, \ldots, j_n\}$ - перестановка $\{1, \ldots, n\}$

AX_{INEQ}

I_4. $(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \geq c) \wedge$
$\wedge (a'_1x_1 + a'_2x_2 + \dots + a'_nx_n \geq c') \leftrightarrow$
$(a_1 + a'_1)x_1 + (a_2 + a'_2)x_2 + \dots + (a_n + a'_n)x_n \geq (c + c')$

I_5. $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \geq c \leftrightarrow$
$da_1x_1 + da_2x_2 + \dots + da_nx_n \geq dc$, где $d \geq 0$

I_6. $t \geq c \vee t \leq c$, где t - терм.

I_7. $t \geq c \rightarrow t > d$, если $c > d$

Парочка простых и хороших результатов

Утверждение

$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n \geq 0$
- *доказуемо в* AX_{INEQ}.

Доказательство.

1. $x_1 - x_1 \geq 0 \quad [I_1]$
2. $-x_1 + x_1 \geq 0 \quad [1 + I_3]$
3. $(1-1)x_1 + (-1+1)x_1 \geq 0 \quad [1 + 2 + I_4]$

...

Парочка простых и хороших результатов

Доказательство (продолжение).

4. $0x_1 + 0x_1 \geq 0$
5. $0x_1 \geq 0 \quad [4 + l_2]$
6. $0x_1 + 0x_2 \geq 0 \quad [5 + l_2]$

$\ldots$

n+4. $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n \geq 0 \quad [n + 3 + l_2]$

Утверждение доказано. $\square$

Парочка простых и хороших результатов

Утверждение

$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n > c \leftrightarrow$
$da_1x_1 + da_2x_2 + \cdots + da_nx_n > dc$
- *доказуемо в* AX_{INEQ} *при* $d > 0$.

Доказательство.

Пусть $\phi := da_1x_1 + \cdots + da_nx_n \leq dc$, $\psi := a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \leq c$.
Тогда надо получить $\neg\psi \leftrightarrow \neg\phi$.

1. $(\phi \leftrightarrow \psi) \to (\neg\phi \leftrightarrow \neg\psi)$ $[Taut]$
2. $\phi \leftrightarrow \psi$ $[I_5]$
3. $\neg\phi \leftrightarrow \neg\psi$ $[1 + 2]$

Утверждение доказано. □

Парочка простых и хороших результатов

Утверждение

$a_1x_1 + a'_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \geq c \leftrightarrow$
$(a_1 + a'_1)x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \geq c$
- доказуемо в AX_{INEQ}.

Доказательство.

1. $x_1 - x_1 \geq 0 \quad [I_1]$
2. $a'_1x_1 - a'_1x_1 \geq 0 \quad [I_5 + I_3]$
3. $a_1x_1 + a'_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \geq c \leftrightarrow$
   $(a_1x_1 + a'_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \geq c \wedge a'_1x_1 - a'_1x_1 \geq 0) \quad [Taut]$

...

Парочка простых и хороших результатов

Доказательство (продолжение).

4. $(a_1x_1 + a_1'x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \geq c \wedge a_1'x_1 - a_1'x_1 \geq 0) \leftrightarrow$
   $(a_1 + a_1')x_1 + (a_1' - a_1')x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \geq c \quad [I_4]$
5. $(a_1 + a_1')x_1 + (a_1' - a_1')x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \geq c \leftrightarrow$
   $(a_1 + a_1')x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + 0x_1 \geq c \quad [I_3]$
6. $(a_1 + a_1')x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + 0x_1 \geq c \leftrightarrow$
   $(a_1 + a_1')x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \geq c \quad [I_2]$
7. $a_1x_1 + a_1'x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \geq c \leftrightarrow$
   $(a_1 + a_1')x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \geq c \quad [Taut]$

Утверждение доказано. □

Полнота и корректность

Теперь, когда мы освоились и доказали бызовые утверждения, мы готовы к доказательству полноты и корректности AX_{INEQ}.

Теорема

AX_{INEQ} полна и корректна.

Корректность очевидна.

Докажем полноту. Пусть ϕ - непротиворечива, тогда надо показать, что она выводима. Упростим себе эту задачу с помощью полезной леммы...

Полнота и корректность

Лемма

1.Если какой-то дизъюнкт ДНФ ϕ выводим, то ϕ тоже выводима.
2.Неравенство ϕ непротиворечиво тогда и только тогда, когда непротиворечив какой-то дизъюнкт её ДНФ.

Доказательство.

Очевидно. □

Теперь мы можем полагать, что ϕ - коньюнкция базовых неравенств или их отрицаний. Мы знаем, что ϕ - непротиворечива. Что значит, что она выполнима?

Полнота и корректность

Это значит, что следующая система неравенств имеет решение...

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n \geq c_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n \geq c_2 \\ \dots \\ a_{r,1}x_1 + a_{r,2}x_2 + \dots + a_{r,n}x_n \geq c_r \\ -a'_{1,1}x_1 - a'_{1,2}x_2 - \dots - a'_{1,n}x_n > c'_1 \\ -a'_{2,1}x_1 - a'_{2,2}x_2 - \dots - a'_{2,n}x_n > c'_2 \\ \dots \\ -a'_{s,1}x_1 - a'_{s,2}x_2 - \dots - a'_{s,n}x_n > c'_s \end{cases}$$

Рассмотрим два случая: $s = 0$ или $s \neq 0$.

Полнота и корректность

Случай 1 ($s = 0$):

Узнаем один полезный факт из линейного программирования и воспользуемся им, чтобы доказать теорему в данном случае.

Факт

Если матричное неравенство $Ax \geq b$ не разрешимо, то существует вектор-строка α:

1. $\alpha \geq 0$
2. $\alpha A = 0$
3. $\alpha b > 0$

Полнота и корректность

Предположим, что ϕ невыволима, тогда и матричное неравенство неразрешимо.

Значит есть вектор-строка $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ такая, что названные свойства выполняются.

Так как $\alpha_i \geq 0$, то ...

$$\alpha_i a_{i,1}x_1 + \alpha_i a_{i,2}x_2 + \cdots + \alpha_i a_{i,n}x_n \geq \alpha_i c_i, \forall i \in \{1, 2, \ldots, r\}$$

Полнота и корректность

Теперь сложим все эти неравенства. Получим $\alpha A x \geq \alpha b$.
Но $\alpha b > 0$, а $(\alpha A)x = 0x \geq \alpha b$.

Значит $f \to (0x_1 > 0)$ доказуемо. То есть $f \to \neg(0x_1 \geq 0)$ доказуемо.

Однако $f \to (0x_1 \geq 0)$ тоже доказуемо. Следовательно доказуемо $\neg f$.
Что влечёт противоречивость f.

Противоречие.

Полнота и корректность AX_{INEQ}

Случай 2 ($s > 0$):
На этот случай есть другой полезный факт из линейного программирования, он похож на предыдущий, но немного сложнее.

Факт

Если матричные неравенства $Ax \geq b$ и $A'x > b'$ не разрешимы вместе, то существует вектор-строки α и α':

1. $\alpha \geq 0$ *и* $\alpha' \geq 0$
2. $\alpha A + \alpha' A' = 0$
3. (a). $\alpha b + \alpha' b' > 0$
   (b). $\alpha b + \alpha' b' \geq 0, \alpha' > 0$

Полнота и корректность AX_{INEQ}

Подслучай 2a оставим без внимания, так как он идентичен случаю 1. Подлучай же 2b рассмотрим подробнее...

Без ограничения общности счииаем, что именно $\alpha'_s > 0$, а также заменим $>$ на $\geq$ во всех неравенствах, кроме s.

Домножим каждое неравенство кроме последнего на соответствующий ему коэффициент и сложим их.
Обозначим результат за

$$a''_1 x_1 + a''_2 x_2 + \cdots + a''_n x_n \geq d$$

Полнота и корректность AX_{INEQ}

$$\alpha A + \alpha' A' = 0 \quad \Rightarrow \quad a''_i = a'_{s,i}, \qquad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Значит

$$-a''_1 x_1 - a''_2 x_2 - \dots - a''_n x_n > \alpha'_s c'_s$$

Помимо этого, мы знаем, что $\alpha b + \alpha' b' \geq 0$, это тоже самое, что и $\alpha'_s c'_s \geq -d$.

Отсюда верно и то, что

$$-a''_1 x_1 - a''_2 x_2 - \dots - a''_n x_n > -d$$

Полнота и корректность AX_{INEQ}

Но это то же самое, что и $a''_1 x_1 + a''_2 x_2 - \cdots + a''_n x_n < d$. А это приводит к противоречию с непротиворечивостью f.

То есть мы поняли, что в любом случае f выполнима, а это и есть то, что было нужно.

Теорема доказана. $\square$

NP-полнота

Наша следующая цель - доказать NP полноту задачи выполнимости неравенства. Для этого нам понадобятся пара новых определений и пара несложных теорем.

$|f|$ — количество символов в неравенстве (каждое целое число считается за один символ).

Теорема

Если f - выполнимо, то существует оценивание A, такое что $A \models f$ и $|\{x|A(x) \neq 0\}| < |f|$.

NP-полнота

Эта теорема очевидна, если знать следующий вспомогательный факт.

Факт

Если система из r линейных уравнений/неравенств имеет решение. То она имеет решения с не превосходящим r числом переменных, не равных нулю.

Теорема доказана. $\square$

NP-полнота

$\|f\|$ — максимальная длина коэффициента в неравенстве (длина рационального числа - это сумма длин его взаимно простого числителя и знаменателя в двоичной записи).

Теорема

Если f - выполнима, то существует оценивание A, такое что $A \vDash f$ и $|\{x|A(x) \neq 0\}| < |f|$, а также для любого x $A(x)$ рациональное число и $|A(x)| = O(|f|\|f\| + |f| log(|f|))$.

NP-полнота

Здесь тоже помогает линейная алгебра.

Факт

Если система из r линейных уравнений/неравенств имеет решение и каждый коэффициент не превосходит l. То она имеет решения с не превосходящим r числом переменных, не равных нулю, каждая из которых не превосходит l.

Теорема доказана. $\square$

NP-полнота

Теорема

Задача о выполнимости f - это NP-полная задача.

NP-трудность:

Недетерменировано выберем означивание среди тех, которые:

- Не равны нулю не более чем в $|f|$ переменных.
- Не равны нулю только в переменных из f.
- Принимают рациональные значения $= O(|f|||f|| + |f|log(|f|))$.

Если f выполнимо, то нужное означивание есть и среди этих.

NP-полнота

Теперь сведём NP-полную задачу к нашей:

Заменим в подаваемой булевой формуле каждую пропозициональную переменную на неравенство вида $x \geq 0$ так, чтобы разным пропозициональным переменным соответствовали разные неравенства.

Неравенство, получившееся в результате такой замены выполнимо тогда и только тогда, когда исходная формула выполнима.

Теорема доказана. $\square$

Спасибо за внимание!!!