Вероятностная логика с кванторами по событиям.

Александр Грефенштейн

16 октября 2020

Напоминание

Пусть $A, B \subseteq \mathbb{N}$

Определения

1. $A \leqslant_m B \;\Leftrightarrow\; \exists\, f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — вычислимая функция $\mid$ $\forall k \;\; k \in A \Leftrightarrow f(k) \in B$
2. $A \;\equiv_m B \Leftrightarrow \; A \leqslant_m B$ и $B \leqslant_m A$
3. m-степень A — это класс эквивалентности A по отношению $\equiv_m$

Также обозначим:

1. $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}; \times, +; = \rangle$ — стандартная модель арифметики
2. $\mathfrak{R} = \langle \mathbb{R}; +, \times; \leqslant, = \rangle$ — стандартная модель вещественных чисел

Немного об аналитической иерархии

В *Монадической арифметике второго порядка* различают два типа переменных: по числам $x_1, x_2, \ldots$ и по множествам $X_1, X_2, \ldots$

Немного об аналитической иерархии

В *Монадической арифметике второго порядка* различают два типа переменных: по числам $x_1, x_2, \ldots$ и по множествам $X_1, X_2, \ldots$
И, соответственно, два типа кванторов.

Немного об аналитической иерархии

В *Монадической арифметике второго порядка* различают два типа переменных: по числам $x_1, x_2, \ldots$ и по множествам $X_1, X_2, \ldots$
И, соответственно, два типа кванторов.

Пусть σ — сигнатура.

Определение

Атомарными σ-формулами называются атомарные σ-формулы 1 порядка и выражения вида $t \in X_i$, где t — терм.

Немного об аналитической иерархии

Определение

Π^1_n-формулами (сигнатуры σ) называются σ-формулы вида

$$\forall X_1 \exists X_2 \dots Q_n X_n \Psi$$

где Ψ не содержит кванторов по множествам.

Немного об аналитической иерархии

Определение

Π^1_n-формулами (сигнатуры σ) называются σ-формулы вида

$$\forall X_1 \exists X_2 \ldots Q_n X_n \Psi$$

где Ψ не содержит кванторов по множествам.

В дальнейшем, мы индентифицируем каждую задачу, заданную вопросом вида:

Удовлетворяет ли данный «вход» рассматриваемому свойству?

с набором всех входов, для которых ответ «да», и рассматривать этот набор как множество натуральных чисел в подходящей нумерации Гёделя.

Немного об аналитической иерархии

Здесь и в дальнейшем $\sigma = \langle \times, +; = \rangle$

Определение

A называется Π^1_n-*ограниченным*, если существует такая Π^1_n-формула $\Phi(x)$ сигнатуры σ, что

$$A = \{k \in \mathbb{N} \mid \mathfrak{N} \Vdash \Phi(k)\}$$

Немного об аналитической иерархии

Здесь и в дальнейшем $\sigma = \langle \times, +; = \rangle$

Определение

A называется Π^1_n*-ограниченным*, если существует такая Π^1_n-формула $\Phi(x)$ сигнатуры σ, что

$$A = \{k \in \mathbb{N} \mid \mathfrak{N} \Vdash \Phi(k)\}$$

Пусть $\mathscr{P}_n$ ($\mathscr{S}_n$) — множество Π^1_n (Σ^1_n) предложений второпорядковой арифметики, истинных в $\mathfrak{N}$ и $\mathscr{P}_\infty$ — «элементарный анализ». Тогда имеем:

$$\Pi^1_0, \Pi^1_1, \Pi^1_2 \ldots \quad \text{и} \quad \Sigma^1_0, \Sigma^1_1, \Sigma^1_2 \ldots$$

$$\Pi^1_\infty$$

Логика QPL : основные определения

Пусть $\mathscr{X} = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ — переменные.

Логика QPL : основные определения

Пусть $\mathscr{X} = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ — переменные.

Определение

Множество e-термов — это наименьшее множество со свойствами:

1. $\emptyset$ и любой элемент $\mathscr{X}$ — e-термы.
2. Если t_1 и t_2 — e-термы, то $\bar{t_1}$ и $t_1 \cap t_2$ — e-термы.

Логика QPL : основные определения

Пусть $\mathscr{X} = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ — переменные.

Определение

Множество e-термов — это наименьшее множество со свойствами:

1. $\emptyset$ и любой элемент $\mathscr{X}$ — e-термы.
2. Если t_1 и t_2 — e-термы, то $\bar{t_1}$ и $t_1 \cap t_2$ — e-термы.

Определение

QPL-атомы — это формулы вида:

$$f(\mu(t_1), \mu(t_2), \ldots, \mu(t_n)) \leqslant g(\mu(t_{n+1}), \mu(t_{n+2}), \ldots, \mu(t_{n+k}))$$

Где $f, g \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_{max\{n,k\}}]$, а μ — символ «вероятностной меры».

Логика QPL : основные определения

Соответственно, *множество QPL-формул* — это замыкание атомов относительно $\neg$, $\wedge$ и $\forall x$ $(x \in \mathscr{X})$.

Логика *QPL* : основные определения

Соответственно, *множество QPL-формул* — это замыкание атомов относительно $\neg$, $\wedge$ и $\forall x$ $(x \in \mathscr{X})$.

Пусть $\mathscr{P}$ — произвольное дискретное вероятностное пространство с сигма-алгеброй подмножеств.

Определение

$\mathfrak{A} = \langle \mathscr{P}, v \rangle$, где $v : \mathscr{X} \to \mathscr{A}$ — означивание; есть QPL-структура

Соответственно, *множество QPL-формул* — это замыкание атомов относительно $\neg$, $\wedge$ и $\forall x$ $(x \in \mathscr{X})$.

Пусть $\mathscr{P}$ — произвольное дискретное вероятностное пространство с сигма-алгеброй подмножеств.

Определение

$\mathfrak{A} = \langle \mathscr{P}, v \rangle$, где $v : \mathscr{X} \to \mathscr{A}$ — означивание; есть *QPL*-структура

Для *бескванторных формул* Φ положим:

$\mathfrak{A} \Vdash \Phi \;\Leftrightarrow\;$ замена всех $\mu(t)$ в Φ на $\mathbb{P}(v(t))$ даёт истинную формулу в $\mathfrak{R}$

Логика QPL : основные определения

Естественно, истинность Φ не зависит от переменных, входящих в

$$\mathscr{X} \setminus FV(\Phi)$$

Логика QPL : основные определения

Естественно, истинность Φ не зависит от переменных, входящих в

$$\mathscr{X} \setminus FV(\Phi)$$

Тогда, для произвольного дискретного вер. пр-ва и частичной оценки v говорим:

Φ — *общезначима в* $\langle \mathscr{P}, v \rangle \iff \langle \mathscr{P}, v' \rangle \Vdash \Phi$ для любого расширения v' на всё множество $\mathscr{X}$

Логика *QPL* : основные определения

Две *QPL*-формулы Φ_1, Φ_2 — *семантически эквивалентны* $(\Phi_1 \sim \Phi_2)$, если $\forall$ *QPL*-структуры $\mathfrak{A}$

$$\mathfrak{A} \Vdash \Phi_1 \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{A} \Vdash \Phi_2$$

Логика *QPL* : основные определения

Две *QPL*-формулы Φ_1, Φ_2 — *семантически эквивалентны* $(\Phi_1 \sim \Phi_2)$, если $\forall$ *QPL*-структуры $\mathfrak{A}$

$$\mathfrak{A} \Vdash \Phi_1 \iff \mathfrak{A} \Vdash \Phi_2$$

И говорим, что *QPL-предложение общезначимо* , если оно $\sim$ $0 \leqslant 0$.

Логика *QPL* : основные определения

Две *QPL*-формулы Φ_1, Φ_2 — *семантически эквивалентны* $(\Phi_1 \sim \Phi_2)$, если $\forall$ *QPL*-структуры $\mathfrak{A}$

$$\mathfrak{A} \Vdash \Phi_1 \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{A} \Vdash \Phi_2$$

И говорим, что *QPL-предложение общезначимо* , если оно $\sim\; 0 \leqslant 0$.

Положим:

$$\Pi_n\text{-}Val \rightleftharpoons \text{мн-во общезначимых } \Pi_n\text{-}QPL \text{ предложений}$$
$$\Sigma_n\text{-}Val \rightleftharpoons \text{мн-во общезначимых } \Sigma_n\text{-}QPL \text{ предложений}$$

Логика QPL : основные определения

Две QPL-формулы Φ_1, Φ_2 — *семантически эквивалентны* $(\Phi_1 \sim \Phi_2)$, если $\forall$ QPL-структуры $\mathfrak{A}$

$$\mathfrak{A} \Vdash \Phi_1 \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{A} \Vdash \Phi_2$$

И говорим, что *QPL-предложение общезначимо* , если оно $\sim$ $0 \leqslant 0$.

Положим:

$$\Pi_n\text{-}Val \rightleftharpoons \text{мн-во общезначимых } \Pi_n\text{-}QPL \text{ предложений}$$
$$\Sigma_n\text{-}Val \rightleftharpoons \text{мн-во общезначимых } \Sigma_n\text{-}QPL \text{ предложений}$$

Тогда, в подходящей Гёделевской нумерации:

$$\Pi_n\text{-}Val \leqslant_m \Pi_{n+1}\text{-}Val,\ \Sigma_{n+1}\text{-}Val$$
$$\Sigma_n\text{-}Val \leqslant_m \Pi_{n+1}\text{-}Val,\ \Sigma_{n+1}\text{-}Val$$

Логика QPL : выразительные возможности

Рассмотрим несколько примеров:
Пусть $\mathscr{P}$ — вероятностное пространство и $\Lambda = \{E \in \mathscr{A} \mid \mathbb{P}(E) = 0\}$

Рассмотрим несколько примеров:
Пусть $\mathscr{P}$ — вероятностное пространство и $\Lambda = \{E \in \mathscr{A} \mid \mathbb{P}(E) = 0\}$

$$1)\ x_1 \preccurlyeq x_2 := \ \mu(\bar{x_1} \cup x_2) = 1$$

Логика QPL : выразительные возможности

Рассмотрим несколько примеров:
Пусть $\mathscr{P}$ — вероятностное пространство и $\Lambda = \{E \in \mathscr{A} \mid \mathbb{P}(E) = 0\}$

$$1)\ x_1 \preccurlyeq x_2 := \ \mu(\bar{x_1} \cup x_2) = 1$$

Очевидно, $\mathscr{P} \Vdash E_1 \preccurlyeq E_2 \iff E_1$ — подмножество E_2 по модулю Λ

Логика QPL : выразительные возможности

Рассмотрим несколько примеров:
Пусть $\mathscr{P}$ — вероятностное пространство и $\Lambda = \{E \in \mathscr{A} \mid \mathbb{P}(E) = 0\}$

$$1)\ x_1 \preccurlyeq x_2 := \ \mu(\bar{x_1} \cup x_2) = 1$$

Очевидно, $\mathscr{P} \Vdash E_1 \preccurlyeq E_2 \iff E_1$ — подмножество E_2 по модулю Λ

$$2)\ x_1 \sim x_2 := \ \ x_1 \preccurlyeq x_2 \wedge x_2 \preccurlyeq x_1$$

Логика QPL : выразительные возможности

Рассмотрим несколько примеров:
Пусть $\mathscr{P}$ — вероятностное пространство и $\Lambda = \{E \in \mathscr{A} \mid \mathbb{P}(E) = 0\}$

$$1)\ x_1 \preccurlyeq x_2 := \ \mu(\bar{x_1} \cup x_2) = 1$$

Очевидно, $\mathscr{P} \Vdash E_1 \preccurlyeq E_2 \iff E_1$ — подмножество E_2 по модулю Λ

$$2)\ x_1 \sim x_2 := \ \ x_1 \preccurlyeq x_2 \wedge x_2 \preccurlyeq x_1$$

$\mathscr{P} \Vdash E_1 \sim E_2 \iff E_1$ совпадает с E_2 по модулю Λ

Логика QPL : выразительные возможности

Рассмотрим несколько примеров:
Пусть $\mathscr{P}$ — вероятностное пространство и $\Lambda = \{E \in \mathscr{A} \mid \mathbb{P}(E) = 0\}$

$$1)\ x_1 \preccurlyeq x_2 := \ \mu(\bar{x_1} \cup x_2) = 1$$

Очевидно, $\mathscr{P} \Vdash E_1 \preccurlyeq E_2 \iff E_1$ — подмножество E_2 по модулю Λ

$$2)\ x_1 \sim x_2 := \ x_1 \preccurlyeq x_2 \wedge x_2 \preccurlyeq x_1$$

$\mathscr{P} \Vdash E_1 \sim E_2 \iff E_1$ совпадает с E_2 по модулю Λ

$$3)\ At(x_1) := \ \mu(x_1) > 0 \wedge \forall x_2((\mu(x_2) > 0 \wedge x_2 \preccurlyeq x_1) \to x_2 \sim x_1)$$

Логика QPL : выразительные возможности

Рассмотрим несколько примеров:
Пусть $\mathscr{P}$ — вероятностное пространство и $\Lambda = \{E \in \mathscr{A} \mid \mathbb{P}(E) = 0\}$

$$1)\ x_1 \preccurlyeq x_2 := \ \mu(\bar{x_1} \cup x_2) = 1$$

Очевидно, $\mathscr{P} \Vdash E_1 \preccurlyeq E_2 \iff E_1$ — подмножество E_2 по модулю Λ

$$2)\ x_1 \sim x_2 := \ \ x_1 \preccurlyeq x_2 \wedge x_2 \preccurlyeq x_1$$

$\mathscr{P} \Vdash E_1 \sim E_2 \iff E_1$ совпадает с E_2 по модулю Λ

$$3)\ At(x_1) := \ \mu(x_1) > 0 \wedge \forall x_2((\mu(x_2) > 0 \wedge x_2 \preccurlyeq x_1) \to x_2 \sim x_1)$$

$\mathscr{P} \Vdash At(E_1) \iff$ не существует события строго между $\emptyset$ и E_1 по модулю Λ

Логика QPL : выразительные возможности

И ещё один любопытный пример:

$$Fin := \exists x_1(\mu(x_1) > 0 \wedge \forall x_2(\mu(x_2) > 0 \to \mu(x_1) \leqslant \mu(x_2)))$$

И ещё один любопытный пример:

$$Fin := \exists x_1(\mu(x_1) > 0 \wedge \forall x_2(\mu(x_2) > 0 \to \mu(x_1) \leqslant \mu(x_2)))$$

Можно проверить, что $\forall \mathscr{P} = (\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$

$$Fin \text{ — истино в } \mathscr{P} \iff \{[A]_\sim \in \mathscr{A}_\sim \mid \mathbb{P}(A) > 0\} \text{ — конечно}$$

Логика QPL : вычислительная сложность

В нашем доказательстве мы по существу будем использовать четыре важных наблюдения:

1. В нашей логике определимо понятие «быть атомом» сигма-алгебры данного вероятностного пространства.
2. Представляя атомы как «первопорядковые объекты», мы можем работать с кванторами над событиями как с монадическими второпорядковыми кванторами.
3. Монадическая второпорядковая теория $\mathfrak{N}^+ := \langle \mathbb{N}; +; = \rangle$ — Π^1_∞-полна.
4. $\langle \mathbb{N}; +; = \rangle$ и $\langle \{ \frac{1}{2^{n+1}} \mid n \in \mathbb{N} \}; \times; = \rangle$ взаимно интерпретируемы друг в друге и значит, мы можем рассматривать каждое $n \in \mathbb{N}$ как элементарное событие с вероятностью $\frac{1}{2^{n+1}}$

Логика QPL : вычислительная сложность

Теорема

Проблема общезначимости для QPL Π^1_∞-полна.

Логика *QPL* : вычислительная сложность

Теорема

Проблема общезначимости для *QPL* Π^1_∞-полна.

Π^1_∞-трудность

Рассмотрим следующие *QPL*-формулы:

1. $x_1 \preccurlyeq x_2 := \ \mu(\bar{x}_1 \cup x_2) = 1$
2. $x_1 \sim x_2 := \ x_1 \preccurlyeq x_2 \wedge x_2 \preccurlyeq x_1$
3. $At(x_1) := \ \mu(x_1) > 0 \wedge \forall x_2((\mu(x_2) > 0 \wedge x_2 \preccurlyeq x_1) \to x_2 \sim x_1)$

Логика QPL : вычислительная сложность

Теорема

Проблема общезначимости для QPL Π^1_∞-полна.

Π^1_∞-трудность

Рассмотрим следующие QPL-формулы:

1. $x_1 \preccurlyeq x_2 := \mu(\bar{x_1} \cup x_2) = 1$
2. $x_1 \sim x_2 := x_1 \preccurlyeq x_2 \wedge x_2 \preccurlyeq x_1$
3. $At(x_1) := \mu(x_1) > 0 \wedge \forall x_2((\mu(x_2) > 0 \wedge x_2 \preccurlyeq x_1) \to x_2 \sim x_1)$

и ещё одну формулу Nat:

$$\exists x_1(At(x_1) \wedge \mu(x_1) = \frac{1}{2}) \wedge \forall x_1(At(x_1) \to \exists x_2(At(x_2) \wedge \mu(x_2) = \frac{\mu(x_1)}{2}))$$

$$\mathscr{P} \Vdash At(E) \;\Leftrightarrow\; \mathscr{P} \Vdash E \sim E_n (n \in \mathbb{N})$$

$$\mathscr{P} \Vdash At(E) \;\Leftrightarrow\; \mathscr{P} \Vdash E \sim E_n(n \in \mathbb{N})$$

Этот факт позволяет нам сопоставлять каждому E_n некоторое натуральное число n и интерпретировать $\mathfrak{N}^+$ следующим образом:

$$n + m = k \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{1}{2^{m+1}} = \frac{1}{2^{k+1}} \times \frac{1}{2}$$

$$\mathscr{P} \Vdash At(E) \;\Leftrightarrow\; \mathscr{P} \Vdash E \sim E_n (n \in \mathbb{N})$$

Этот факт позволяет нам сопоставлять каждому E_n некоторое натуральное число n и интерпретировать $\mathfrak{N}^+$ следующим образом:

$$n + m = k \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{1}{2^{m+1}} = \frac{1}{2^{k+1}} \times \frac{1}{2}$$

Также заметим, что $\forall S \subseteq \mathbb{N}\ E_S := \bigcup_{n \in S} E_n \in \mathscr{A}$, поэтому:

$$n \in S \;\Leftrightarrow\; \mathscr{P} \Vdash E_n \preccurlyeq E_S$$

$$\mathscr{P} \Vdash At(E) \;\Leftrightarrow\; \mathscr{P} \Vdash E \sim E_n (n \in \mathbb{N})$$

Этот факт позволяет нам сопоставлять каждому E_n некоторое натуральное число n и интерпретировать $\mathfrak{N}^+$ следующим образом:

$$n + m = k \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{1}{2^{m+1}} = \frac{1}{2^{k+1}} \times \frac{1}{2}$$

Также заметим, что $\forall S \subseteq \mathbb{N}\; E_S := \bigcup_{n \in S} E_n \in \mathscr{A}$, поэтому:

$$n \in S \;\Leftrightarrow\; \mathscr{P} \Vdash E_n \preccurlyeq E_S$$

Легко показать, что любая формула в языке структуры $\mathfrak{N}^+$ эффективно преобразуется в логически эквивалентную, все атомарные подформулы которой имеют вид:

$$x_n + x_m = x_k \;\;\&\;\; x_n \in X_m$$

Логика QPL : вычислительная сложность

Тогда необходимая трансляция τ строится реккурсивно:

$$\tau(x_n + x_m = x_k) := \mu(x_{2n}) + \mu(x_{2m}) = \mu(x_{2k}) \times \frac{1}{2}$$

$$\tau(x_n \in X_m) := x_{2n} \preccurlyeq x_{2m+1}$$

$$\tau(\neg\phi) := \neg\tau(\phi)$$

$$\tau(\phi \wedge \psi) := \tau(\phi) \wedge \tau(\psi)$$

$$\tau(\forall x_n \phi) := \forall x_{2n}(At(x_{2n}) \to \tau(\phi))$$

$$\tau(\forall X_m \phi) := \forall x_{2m+1}\tau(\phi)$$

Логика QPL : вычислительная сложность

Тогда необходимая трансляция τ строится реккурсивно:

$$\tau(x_n + x_m = x_k) := \mu(x_{2n}) + \mu(x_{2m}) = \mu(x_{2k}) \times \frac{1}{2}$$

$$\tau(x_n \in X_m) := x_{2n} \preccurlyeq x_{2m+1}$$

$$\tau(\neg\phi) := \neg\tau(\phi)$$

$$\tau(\phi \wedge \psi) := \tau(\phi) \wedge \tau(\psi)$$

$$\tau(\forall x_n \phi) := \forall x_{2n}(At(x_{2n}) \to \tau(\phi))$$

$$\tau(\forall X_m \phi) := \forall x_{2m+1}\tau(\phi)$$

ϕ — истина в $\mathfrak{N}^+$ $\Leftrightarrow$ $Nat \to \tau(\phi)$ — общезначима в QPL ■

Логика QPL : вычислительная сложность

Факт

Основные теоретико-множественные операции, вещественные числа, их последовательности, а также понятия конечных сумм и *lim* определимы в арифметике 2-го порядка.

Логика QPL : вычислительная сложность

Факт

Основные теоретико-множественные операции, вещественные числа, их последовательности, а также понятия конечных сумм и *lim* определимы в арифметике 2-го порядка.

Π^1_∞-ограниченность

Каждое дискретное вер. пр-во единственным образом определяется функцией

$$p : \Omega \to [0, 1]$$

Факт

Основные теоретико-множественные операции, вещественные числа, их последовательности, а также понятия конечных сумм и *lim* определимы в арифметике 2-го порядка.

Π^1_∞-ограниченность

Каждое дискретное вер. пр-во единственным образом определяется функцией

$$p : \Omega \to [0, 1]$$

Логика QPL : вычислительная сложность

Зарезервируем некоторую второпорядковую переменную X_0, пробегающую:

$$f \mid f : \mathbb{N} \to [0,1] \ (\sum_{n \in \mathbb{N}} f(n) = 1)$$

Логика QPL : вычислительная сложность

Зарезервируем некоторую второпорядковую переменную X_0, пробегающую:

$$f \mid f : \mathbb{N} \to [0,1] \; (\textstyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n) = 1)$$

Тогда $\forall$ QPL-предложения Φ $\rho(\Phi)$ получается из Φ заменой

- $\mu(t)$ на $\lim_{n\to\infty} \sum_{m\in\{0,\ldots,n\}\cap t} X_0(m)$
- каждого вхождения x_m на X_m

Тогда получаем, что:

$$\Phi\text{-общезначима в } QPL \;\Leftrightarrow\; \bar{\forall} X \rho(\Phi) \text{ — истина в } \mathfrak{N} \qquad \blacksquare$$

Максимальный разрешимый префиксный фрагмент

Утверждение

Π_2-Val^C — разрешимо.

Доказательство

Сведение к разрешимому мн-ву Π_0-Val^C ...

Максимальный разрешимый префиксный фрагмент

Утверждение

Π_2-Val^C — разрешимо.

Доказательство

Сведение к разрешимому мн-ву Π_0-Val^C ...

Рассмотрим $\mathscr{L} := \{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ и соответствующие ему бескванторные $QPL^{\mathscr{L}}$-предложения.

Максимальный разрешимый префиксный фрагмент

Утверждение

Π_2-Val^C — разрешимо.

Доказательство

Сведение к разрешимому мн-ву Π_0-Val^C ...

Рассмотрим $\mathscr{L} := \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и соответствующие ему бескванторные $QPL^{\mathscr{L}}$-предложения.

Если $\mathscr{P} = \langle \Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}\rangle$, то легко убедиться, что для любого QPL^C-предложения вида $\forall x_1 \dots \forall x_n \Phi$ и $v : C(\Phi) \to \mathscr{A}$

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \Phi \text{ - истина в } (\mathscr{P}, v) \iff \Phi[x_1/c_{k+1}, \dots, x_n/c_{k+n}] \text{ — общезначима в } (\mathscr{P}, v)$$

Максимальный разрешимый префиксный фрагмент

Теперь $\forall v : S \to \mathscr{A} \mid S \subseteq \mathscr{L}$ и S — конечное мн-во, положим:

1. T_S :=мн-во e-термов, полученных из S, включая $\emptyset$.
2. $\mathscr{A}_S := \{v(t) \mid t \in T_S\}$ и $\mathbb{P}_S := \mathbb{P}|_{\mathscr{A}_S}$

Максимальный разрешимый префиксный фрагмент

Теперь $\forall v : S \to \mathscr{A} \mid S \subseteq \mathscr{L}$ и S — конечное мн-во, положим:

1. T_S :=мн-во e-термов, полученных из S, включая $\emptyset$.
2. $\mathscr{A}_S := \{v(t) \mid t \in T_S\}$ и $\mathbb{P}_S := \mathbb{P}|_{\mathscr{A}_S}$

Очевидно, что $\mathscr{P}_S := \langle \Omega, \mathscr{A}_S, \mathbb{P}_S \rangle$ — конечное подпространство $\mathscr{P}$

Максимальный разрешимый префиксный фрагмент

Теперь $\forall v : S \to \mathscr{A} \mid S \subseteq \mathscr{L}$ и S — конечное мн-во, положим:

1. T_S :=мн-во e-термов, полученных из S, включая $\emptyset$.
2. $\mathscr{A}_S := \{v(t) \mid t \in T_S\}$ и $\mathbb{P}_S := \mathbb{P}|_{\mathscr{A}_S}$

Очевидно, что $\mathscr{P}_S := \langle \Omega, \mathscr{A}_S, \mathbb{P}_S \rangle$ — конечное подпространство $\mathscr{P}$
Далее, $\forall$ QPL^C-предложения вида $\exists x_1 \ldots \exists x_n \Psi$, где Ψ — бескванторная и $v : S \to \mathscr{A} \mid S = C(\Psi)$ верно

$$\exists x_1 \ldots \exists x_n \Psi \text{ — истина в } (\mathscr{P}_S, v) \iff$$
$$\bigvee_{t_1 \in D_S} \ldots \bigvee_{t_n \in D_S} \Psi[x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n] \text{ — истина в } (\mathscr{P}, v)$$

Где D_S означает конечное множество всех полных Д.Н.Ф. построенных из S. ■

Максимальный разрешимый префиксный фрагмент

Утверждение

Σ_2-VAL^C — неразрешимо.

Максимальный разрешимый префиксный фрагмент

Утверждение

Σ_2-VAL^C — неразрешимо.

Идея доказательства.

Сведение неразрешимой первопорядковой $\exists\forall$-теории конечных, симметричных, иррефлексивных графов к нашей ...