Алгебраический подход к логике

Михаил Мрыхин

23 апреля 2020

Идея

Реляционные логики широки, но метод их определения накладывает свои ограничения.

Идея

Реляционные логики широки, но метод их определения накладывает свои ограничения.
Например, если мы хотим проверить корректность формулы с $\Box$ для некоторого подмножества миров, на подмножество достижимых миров накладывается сильное условие — оно должно раскладываться на достижимые из индивидуальных.

Идея

Реляционные логики широки, но метод их определения накладывает свои ограничения.
Например, если мы хотим проверить корректность формулы с $\Box$ для некоторого подмножества миров, на подмножество достижимых миров накладывается сильное условие — оно должно раскладываться на достижимые из индивидуальных.
Хотим «запутать» миры, а на самом деле абстрагироваться от семантики миров совсем.

Подход к проблеме

Подумаем, что нам нужно от замены подмножеств миров.

Подход к проблеме

Подумаем, что нам нужно от замены подмножеств миров.
Нужен аналог объединения для $\vee$, аналог пересечения для $\wedge$, аналог того, что делает $\to$, а также константы 1 и 0 (так как всё же хочется выделить формулы, выполнимые везде или нигде).

Подход к проблеме

Подумаем, что нам нужно от замены подмножеств миров.
Нужен аналог объединения для $\vee$, аналог пересечения для $\wedge$, аналог того, что делает $\to$, а также константы 1 и 0 (так как всё же хочется выделить формулы, выполнимые везде или нигде).
Оказывается, такая модель существует, и называется алгеброй Гейтинга.

Подход к проблеме

Подумаем, что нам нужно от замены подмножеств миров.
Нужен аналог объединения для $\vee$, аналог пересечения для $\wedge$, аналог того, что делает $\rightarrow$, а также константы 1 и 0 (так как всё же хочется выделить формулы, выполнимые везде или нигде).
Оказывается, такая модель существует, и называется алгеброй Гейтинга.

Определение

Алгебра Гейтинга $\mathcal{H} = (A, \wedge, \vee, \rightarrow, 0, 1)$ — это ограниченная решётка с дополнительной бинарной операцией $\rightarrow$, удовлетворяющей аксиоме $(c \wedge a) \leq b \Leftrightarrow c \leq (a \rightarrow b)$.

Подход к проблеме

Подумаем, что нам нужно от замены подмножеств миров.
Нужен аналог объединения для $\vee$, аналог пересечения для $\wedge$, аналог того, что делает $\to$, а также константы 1 и 0 (так как всё же хочется выделить формулы, выполнимые везде или нигде).
Оказывается, такая модель существует, и называется алгеброй Гейтинга.

Определение

Алгебра Гейтинга $\mathcal{H} = (A, \wedge, \vee, \to, 0, 1)$ — это ограниченная решётка с дополнительной бинарной операцией $\to$, удовлетворяющей аксиоме $(c \wedge a) \leq b \Leftrightarrow c \leq (a \to b)$.

Заметим, что последняя аксиома эквивалентна
$a \to b = max\{c | c \wedge a \leq b\}$.

Подход к проблеме

Подумаем, что нам нужно от замены подмножеств миров.
Нужен аналог объединения для $\vee$, аналог пересечения для $\wedge$, аналог того, что делает $\to$, а также константы 1 и 0 (так как всё же хочется выделить формулы, выполнимые везде или нигде).
Оказывается, такая модель существует, и называется алгеброй Гейтинга.

Определение

Алгебра Гейтинга $\mathcal{H} = (A, \wedge, \vee, \to, 0, 1)$ — это ограниченная решётка с дополнительной бинарной операцией $\to$, удовлетворяющей аксиоме $(c \wedge a) \leq b \Leftrightarrow c \leq (a \to b)$.

Заметим, что последняя аксиома эквивалентна $a \to b = max\{c | c \wedge a \leq b\}$.
Отрицания в определении нет, но его можно задать как $\neg a = a \to 0$; если для всех a выполняется $a \vee \neg a = 1$, то алгебра булева, и можно обратно определить $a \to b = \neg a \vee b$.

Модальные алгебры

Определение

Модальная алгебра $\mathcal{M} = (A, \wedge, \vee, \neg, 0, 1, \Box)$ *— это булева алгебра с дополнительной унарной операцией* $\Box$, *удовлетворяющей аксиомам* $\Box(a \wedge b) = \Box a \wedge \Box b$ *и* $\Box 1 = 1$.

Модальные алгебры

Определение

Модальная алгебра $\mathcal{M} = (A, \wedge, \vee, \neg, 0, 1, \Box)$ *— это булева алгебра с дополнительной унарной операцией* $\Box$, *удовлетворяющей аксиомам* $\Box(a \wedge b) = \Box a \wedge \Box b$ *и* $\Box 1 = 1$.

Также используется двойственная операция $\Diamond a = \neg\Box\neg a$.

Модальные алгебры

Определение

Модальная алгебра $\mathcal{M} = (A, \wedge, \vee, \neg, 0, 1, \Box)$ *— это булева алгебра с дополнительной унарной операцией* $\Box$, *удовлетворяющей аксиомам* $\Box(a \wedge b) = \Box a \wedge \Box b$ *и* $\Box 1 = 1$.

Также используется двойственная операция $\Diamond a = \neg\Box\neg a$.
Модальная алгебра называется полной, если соответствующая булева алгебра полна.

Модальные алгебры

Определение

Модальная алгебра $\mathcal{M} = (A, \wedge, \vee, \neg, 0, 1, \Box)$ *— это булева алгебра с дополнительной унарной операцией* $\Box$*, удовлетворяющей аксиомам* $\Box(a \wedge b) = \Box a \wedge \Box b$ *и* $\Box 1 = 1$.

Также используется двойственная операция $\Diamond a = \neg\Box\neg a$.
Модальная алгебра называется полной, если соответствующая булева алгебра полна.

Определение

S4-алгебра $\mathcal{M} = (A, \wedge, \vee, \neg, 0, 1, \Box)$ *- это модальная алгебра, удовлетворяющая аксиомам* $\Box a \leq a$ *и* $\Box a \leq \Box\Box a$. *Элемент* a *называется открытым, если* $\Box a = a$, *и замкнутым, если* $\Diamond a = a$.

Некоторые алгебраические факты

Утверждение

Открытые элементы S4-алгебры $\mathcal{M} = (A, \wedge, \vee, \neg, 0, 1, \Box)$ *образуют алгебру Гейтинга* $\mathcal{M}^0 = (\Box A, \wedge, \vee, \to, 0, 1)$, *где* $a \to b = \Box(\neg a \vee b)$. *Более того, если* $\mathcal{M}$ *полна, то полна и* $\mathcal{M}^0$, *причём* $\bigvee_{\mathcal{M}^0}(\cdot) = \bigvee_{\mathcal{M}}(\cdot)$ *и* $\bigwedge_{\mathcal{M}^0}(\cdot) = \Box \bigwedge_{\mathcal{M}}(\cdot)$.

Некоторые алгебраические факты

Утверждение

Открытые элементы S4-алгебры $\mathcal{M} = (A, \wedge, \vee, \neg, 0, 1, \Box)$ *образуют алгебру Гейтинга* $\mathcal{M}^0 = (\Box A, \wedge, \vee, \to, 0, 1)$, *где* $a \to b = \Box(\neg a \vee b)$. *Более того, если* $\mathcal{M}$ *полна, то полна и* $\mathcal{M}^0$, *причём* $\bigvee_{\mathcal{M}^0}(\cdot) = \bigvee_{\mathcal{M}}(\cdot)$ *и* $\bigwedge_{\mathcal{M}^0}(\cdot) = \Box \bigwedge_{\mathcal{M}}(\cdot)$.

Утверждение

Любая алгебра Гейтинга $\mathcal{H}$ *изоморфна* $\mathcal{M}^0$ *для какой-то S4-алгебры* $\mathcal{M}$.

Алгебраические модели

Определение

Оценка в модальной алгебре $\mathcal{M}$ — это отображение $v : Prop \to A$.

Алгебраические модели

Определение

Оценка в модальной алгебре $\mathcal{M}$ *— это отображение* $v : Prop \to A$*. Оценку можно единственным образом продолжить на* $\mathcal{L}^m$ *с условием* $v(\bot) = 0$ *и инвариантности относительно* $\wedge, \vee, \to, \Box$*.*

Алгебраические модели

Определение

Оценка в модальной алгебре $\mathcal{M}$ — это отображение $v : Prop \to A$. Оценку можно единственным образом продолжить на $\mathcal{L}^m$ с условием $v(\bot) = 0$ и инвариантности относительно $\wedge, \vee, \to, \Box$. Пара $(\mathcal{M}, v)$ называется (алгебраической) моделью над $\mathcal{M}$. Модальная формула ϕ истинна в модели $(\mathcal{M}, v)$, если $v(\phi) = 1$; истинна на алгебре $\mathcal{M}$, если истинна в модели $(\mathcal{M}, v)$ для любой оценки v.

Лемма о подстановке

Лемма

Пусть $\mathcal{M}$ - модальная алгебра, s — подстановка. Если для оценок v, u выполняется $v(\phi) = u(s\phi)$ для всех $\phi \in Prop$, то это же равенство выполняется для всех $\phi \in \mathcal{L}^m$.

Лемма о подстановке

Лемма

Пусть $\mathcal{M}$ - модальная алгебра, s — подстановка. Если для оценок v, u выполняется $v(\phi) = u(s\phi)$ для всех $\phi \in Prop$, то это же равенство выполняется для всех $\phi \in \mathcal{L}^m$.

Доказательство.

Индукция по длине ϕ. □

Лемма о корректности

Лемма

Множество $L\mathcal{M} = \{\phi | \mathcal{M} \vDash \phi\}$ *является модальной логикой.*

Лемма о корректности

Лемма

Множество $L\mathcal{M} = \{\phi | \mathcal{M} \vDash \phi\}$ *является модальной логикой.*

Доказательство.

$L\mathcal{M}$ замкнуто относительно подстановки по предыдущей лемме.

Лемма о корректности

Лемма

Множество $L\mathcal{M} = \{\phi | \mathcal{M} \vDash \phi\}$ *является модальной логикой.*

Доказательство.

$L\mathcal{M}$ замкнуто относительно подстановки по предыдущей лемме. Оно содержит все классические тавтологии, так как они истинны в любой булевой логике.

Лемма о корректности

Лемма

Множество $L\mathcal{M} = \{\phi | \mathcal{M} \vDash \phi\}$ *является модальной логикой.*

Доказательство.

$L\mathcal{M}$ замкнуто относительно подстановки по предыдущей лемме.
Оно содержит все классические тавтологии, так как они истинны в любой булевой логике.
Затем заметим, что в модальной алгебре операция $\Box$ монотонна: $x \leq y \Rightarrow \Box x \leq \Box y$. Действительно, $\Box x = \Box(x \wedge y) = \Box x \wedge \Box y$.
Применив это ко второму определению алгебраической импликации, получаем $\Box(a \to b) \wedge \Box a \leq \Box b$, откуда по первому определению $\Box(a \to b) \leq \Box a \to \Box b$, то есть $\Box(a \to b) \to (\Box a \to \Box b) = 1$.

Лемма о корректности

Лемма

Множество $L\mathcal{M} = \{\phi | \mathcal{M} \vDash \phi\}$ *является модальной логикой.*

Доказательство.

$L\mathcal{M}$ замкнуто относительно подстановки по предыдущей лемме.
Оно содержит все классические тавтологии, так как они истинны в любой булевой логике.
Затем заметим, что в модальной алгебре операция $\Box$ монотонна: $x \leq y \Rightarrow \Box x \leq \Box y$. Действительно, $\Box x = \Box(x \wedge y) = \Box x \wedge \Box y$.
Применив это ко второму определению алгебраической импликации, получаем $\Box(a \to b) \wedge \Box a \leq \Box b$, откуда по первому определению $\Box(a \to b) \leq \Box a \to \Box b$, то есть $\Box(a \to b) \to (\Box a \to \Box b) = 1$.
Наконец, modus ponens и нормализация сохраняют истинность, так как $1 \to a \Rightarrow a = 1$ и $\Box 1 = 1$. $\Box$

Интуиционистские алгебраические модели

Определение

Оценка в алгебре Гейтинга $\mathcal{H}$ *— это отображение* $v^I : Prop \to A$.
Оценку можно единственным образом продолжить на Int *с условием* $v^I(\bot) = 0$ *и инвариантности относительно* $\wedge, \vee, \to$.
Пара $(\mathcal{H}, v^I)$ *называется (алгебраической) моделью над* $\mathcal{H}$.
Интуиционистская формула ϕ *истинна в модели* $(\mathcal{H}, v^I)$, *если* $v^I(\phi) = 1$; *истинна на алгебре* $\mathcal{H}$, *если истинна в модели* $(\mathcal{H}, v^I)$ *для любой оценки* v^I.

Интуиционистские алгебраические модели

Определение

Оценка в алгебре Гейтинга $\mathcal{H}$ *— это отображение* $v^I : Prop \to A$*.*
Оценку можно единственным образом продолжить на Int *с условием* $v^I(\bot) = 0$ *и инвариантности относительно* $\wedge, \vee, \to$*.*
Пара $(\mathcal{H}, v^I)$ *называется (алгебраической) моделью над* $\mathcal{H}$*.*
Интуиционистская формула ϕ *истинна в модели* $(\mathcal{H}, v^I)$*, если* $v^I(\phi) = 1$*; истинна на алгебре* $\mathcal{H}$*, если истинна в модели* $(\mathcal{H}, v^I)$ *для любой оценки* v^I*.*

Лемма

Пусть $\mathcal{H}$ *- алгебра Гейтинга,* s *— подстановка. Если для оценок* v^I, u^I *выполняется* $v^I(\phi) = u^I(s\phi)$ *для всех* $\phi \in Prop$*, то это же равенство выполняется для всех* $\phi \in Int$*.*

Интуиционистские алгебраические модели

Определение

Оценка в алгебре Гейтинга $\mathcal{H}$ — *это отображение* $v^I : Prop \to A$.
Оценку можно единственным образом продолжить на Int *с условием* $v^I(\bot) = 0$ *и инвариантности относительно* $\wedge, \vee, \to$.
Пара $(\mathcal{H}, v^I)$ *называется (алгебраической) моделью над* $\mathcal{H}$.
Интуиционистская формула ϕ *истинна в модели* $(\mathcal{H}, v^I)$, *если* $v^I(\phi) = 1$; *истинна на алгебре* $\mathcal{H}$, *если истинна в модели* $(\mathcal{H}, v^I)$ *для любой оценки* v^I.

Лемма

Пусть $\mathcal{H}$ *- алгебра Гейтинга,* s *— подстановка. Если для оценок* v^I, u^I *выполняется* $v^I(\phi) = u^I(s\phi)$ *для всех* $\phi \in Prop$, *то это же равенство выполняется для всех* $\phi \in Int$.

Лемма

Множество $L\mathcal{H} = \{\phi | \mathcal{H} \vDash \phi\}$ *является суперинтуиционистской логикой.*

Трансляция Гёделя-Тарского

Определение

Трансляция Гёделя-Тарского — это отображение из Int *в* $\mathcal{L}^m$*, заданное следующим образом:*

$$
\begin{aligned}
T(\bot) &:= \bot \\
T(p) &:= \Box p \\
T(\phi \vee \psi) &:= T(\phi) \vee T(\psi) \\
T(\phi \wedge \psi) &:= T(\phi) \wedge T(\psi) \\
T(\phi \to \psi) &:= \Box(T(\phi) \to T(\psi))
\end{aligned}
$$

Трансляция Гёделя-Тарского

Определение

Трансляция Гёделя-Тарского — это отображение из Int в $\mathcal{L}^m$, заданное следующим образом:

$$
\begin{aligned}
T(\bot) &:= \bot \\
T(p) &:= \Box p \\
T(\phi \vee \psi) &:= T(\phi) \vee T(\psi) \\
T(\phi \wedge \psi) &:= T(\phi) \wedge T(\psi) \\
T(\phi \to \psi) &:= \Box(T(\phi) \to T(\psi))
\end{aligned}
$$

Лемма

$(\Box T(\phi) \leftrightarrow T(\phi)) \in S4$ *для любой интуиционистской формулы* ϕ.

Трансляция Гёделя-Тарского

Определение

Трансляция Гёделя-Тарского — это отображение из Int в $\mathcal{L}^m$, заданное следующим образом:

$$
\begin{aligned}
T(\bot) &:= \bot \\
T(p) &:= \Box p \\
T(\phi \vee \psi) &:= T(\phi) \vee T(\psi) \\
T(\phi \wedge \psi) &:= T(\phi) \wedge T(\psi) \\
T(\phi \to \psi) &:= \Box(T(\phi) \to T(\psi))
\end{aligned}
$$

Лемма

$(\Box T(\phi) \leftrightarrow T(\phi)) \in S4$ *для любой интуиционистской формулы* ϕ.

Доказательство.

Индукция по длине ϕ. $\Box$

Вложение Int в S4

Лемма

Пусть $\mathcal{M}$ — S4-алгебра.

Доказательство.

Вложение Int в S4

Лемма

Пусть $\mathcal{M}$ — S4-алгебра.

1. *Пусть v^I и u — такие оценки в $\mathcal{M}$, что $v^I(p) = \Box u(p)$ для всех p. Тогда $v^I(\phi) = u(T(\phi))$ для любой интуиционистской формулы ϕ.*

Доказательство.

Вложение Int в S4

Лемма

Пусть $\mathcal{M}$ — S4-алгебра.

1. *Пусть v^I и u — такие оценки в $\mathcal{M}$, что $v^I(p) = \Box u(p)$ для всех p. Тогда $v^I(\phi) = u(T(\phi))$ для любой интуиционистской формулы ϕ.*
2. *Для любой интуиционистской формулы ϕ утверждения $\mathcal{M}^0 \vDash \phi$ и $\mathcal{M} \vDash T(\phi)$ эквивалентны.*

Доказательство.

Вложение Int в S4

Лемма

Пусть $\mathcal{M}$ — S4-алгебра.

1. *Пусть v^I и u — такие оценки в $\mathcal{M}$, что $v^I(p) = \Box u(p)$ для всех p. Тогда $v^I(\phi) = u(T(\phi))$ для любой интуиционистской формулы ϕ.*
2. *Для любой интуиционистской формулы ϕ утверждения $\mathcal{M}^0 \vDash \phi$ и $\mathcal{M} \vDash T(\phi)$ эквивалентны.*

Доказательство.

1. Снова индукцией по размеру формулы.

Вложение Int в S4

Лемма

Пусть $\mathcal{M}$ — S4-алгебра.

1. *Пусть v^I и u — такие оценки в $\mathcal{M}$, что $v^I(p) = \Box u(p)$ для всех p. Тогда $v^I(\phi) = u(T(\phi))$ для любой интуиционистской формулы ϕ.*
2. *Для любой интуиционистской формулы ϕ утверждения $\mathcal{M}^0 \vDash \phi$ и $\mathcal{M} \vDash T(\phi)$ эквивалентны.*

Доказательство.

1. Снова индукцией по размеру формулы.
2. $\Rightarrow$ Пусть u — произвольная оценка в $\mathcal{M}$, тогда $v^I = \Box u$ — оценка в $\mathcal{M}^0$. Если $\mathcal{M}^0 \vDash \phi$, то, в частности, $v^I(\phi) = 1$, а тогда $u(T(\phi)) = 1$ по предыдущему пункту.

Вложение Int в S4

Лемма

Пусть $\mathcal{M}$ — S4-алгебра.

1. *Пусть v^I и u — такие оценки в $\mathcal{M}$, что $v^I(p) = \Box u(p)$ для всех p. Тогда $v^I(\phi) = u(T(\phi))$ для любой интуиционистской формулы ϕ.*
2. *Для любой интуиционистской формулы ϕ утверждения $\mathcal{M}^0 \vDash \phi$ и $\mathcal{M} \vDash T(\phi)$ эквивалентны.*

Доказательство.

1. Снова индукцией по размеру формулы.
2. $\Rightarrow$ Пусть u — произвольная оценка в $\mathcal{M}$, тогда $v^I = \Box u$ — оценка в $\mathcal{M}^0$. Если $\mathcal{M}^0 \vDash \phi$, то, в частности, $v^I(\phi) = 1$, а тогда $u(T(\phi)) = 1$ по предыдущему пункту.
   $\Leftarrow$ Аналогично, но $u = v^I$.

$\Box$

Алгебры Линденбаума

Определение

Алгебра Линденбаума $Lind(L)$ *модальной (или суперинтуиционистской) логики* L *— это множество* $\mathcal{L}^m$ *(или* Int*)*$/\sim_L$ *(где* $\sim_L$ *— это отношение эквивалентности в логике* L*), снабжённое операциями модальной алгебры (или алгебры Гейтинга) согласованно с* L*.*

Алгебры Линденбаума

Определение

Алгебра Линденбаума $Lind(L)$ *модальной (или суперинтуиционистской) логики* L *— это множество* $\mathcal{L}^m$ *(или* Int*)*$/\sim_L$ *(где* $\sim_L$ *— это отношение эквивалентности в логике* L*), снабжённое операциями модальной алгебры (или алгебры Гейтинга) согласованно с* L.

Теорема

$Lind(L)$ *— корректно определённая модальная алгебра (или алгебра Гейтинга), и* $L(Lind(L)) = L$.

Алгебраические многообразия

Определение

Алгебраическое многообразие, определяемое множеством формул Γ *— это множество всех алгебр, на которых истинны все формулы из этого множества.*

Алгебраические многообразия

Определение

Алгебраическое многообразие, определяемое множеством формул Γ *— это множество всех алгебр, на которых истинны все формулы из этого множества.*

Теорема (Биркгоф)

Класс алгебр (модальных или Гейтинга) является алгебраическим многообразием в том и только том случае, если он замкнут относительно подалгебр, гомоморфных образов и прямых произведений.

Алгебраические многообразия

Определение

Алгебраическое многообразие, определяемое множеством формул Γ — это множество всех алгебр, на которых истинны все формулы из этого множества.

Теорема (Биркгоф)

Класс алгебр (модальных или Гейтинга) является алгебраическим многообразием в том и только том случае, если он замкнут относительно подалгебр, гомоморфных образов и прямых произведений.

Теорема

Частично упорядоченное (по включению) множество всех модальных (или интуиционистских) логик дуально изоморфно множеству всех алгебраических многообразий модальных алгебр (или алгебр Гейтинга).

Спасибо за внимание!