Темпоральные (временные) логики

Темпоральные логики

Хотим рассуждать об свойствах, истинность которых меняется со временем. Например, “сейчас идёт дождь” или “когда-нибудь пойдёт дождь”. При этом само время может быть дискретным, например: “следующая итерация цикла последняя”, либо плотным, непрерывным или даже ветвящимся: “при любом развитии событий мы выиграем”.

Темпоральные логики

Хотим рассуждать об свойствах, истинность которых меняется со временем. Например, "сейчас идёт дождь" или "когда-нибудь пойдёт дождь". При этом само время может быть дискретным, например: "следующая итерация цикла последняя", либо плотным, непрерывным или даже ветвящимся: "при любом развитии событий мы выиграем". Это похоже на то, с чем мы сталкиваемся в модальной логике: истинность формулы зависит от конкретного "мира" или, скорее, "момента времени". Тем не менее мы хотим говорить как о будущем, так и о прошлом ("дождь уже когда-то шёл"), то есть одного модального оператора нам не хватает.
Можно говорить о *мультимодальных* логиках, и, действительно, самая простая версия темпоральной логики является их частным случаем.

Мультимодальные логики

Рассматриваем модальный язык с несколькими модальными операторами: $\mathcal{L}^{mm} = \mathcal{L}^{CL} \cup \{[i] | i \in I\}$ для некоторого множества индексов I.

Мультимодальные логики

Рассматриваем модальный язык с несколькими модальными операторами: $\mathcal{L}^{mm} = \mathcal{L}^{CL} \cup \{[i] | i \in I\}$ для некоторого множества индексов I.
Шкалой Крипке для такого языка называется пара $\mathcal{F} = (W, \{R_i\}_{i \in I})$, где $R_i \subseteq W \times W$ – произвольное отношение.
Моделью по-прежнему называем пару $\mu = (\mathcal{F}, \nu)$, где $\mathcal{F}$ – шкала, а $\nu\colon \mathrm{Prop} \to 2^W$ – оценка.

Мультимодальные логики

Рассматриваем модальный язык с несколькими модальными операторами: $\mathcal{L}^{mm} = \mathcal{L}^{CL} \cup \{[i] | i \in I\}$ для некоторого множества индексов I.
Шкалой Крипке для такого языка называется пара $\mathcal{F} = (W, \{R_i\}_{i \in I})$, где $R_i \subseteq W \times W$ – произвольное отношение.
Моделью по-прежнему называем пару $\mu = (\mathcal{F}, \nu)$, где $\mathcal{F}$ – шкала, а $\nu\colon \mathrm{Prop} \to 2^W$ – оценка.
Истинность в мире w модели μ формулы φ для классических связок определяется локально.

$$\mu, w \Vdash [i]\psi \iff \forall u \in W, wR_i u \to \mu, u \Vdash \psi$$

Мультимодальные логики

Рассматриваем модальный язык с несколькими модальными операторами: $\mathcal{L}^{mm} = \mathcal{L}^{CL} \cup \{[i] | i \in I\}$ для некоторого множества индексов I.
Шкалой Крипке для такого языка называется пара $\mathcal{F} = (W, \{R_i\}_{i \in I})$, где $R_i \subseteq W \times W$ – произвольное отношение.
Моделью по-прежнему называем пару $\mu = (\mathcal{F}, \nu)$, где $\mathcal{F}$ – шкала, а $\nu\colon \mathrm{Prop} \to 2^W$ – оценка.
Истинность в мире w модели μ формулы φ для классических связок определяется локально.

$$\mu, w \Vdash [i]\psi \iff \forall u \in W, wR_i u \to \mu, u \Vdash \psi$$

Символы $\langle i \rangle$ определяем стандартным образом.

Мультимодальные логики

Нормальной мультимодальной логикой называем множество формул L, содержащее все классические тавтологии, замкнутое относительно MP и подстановок, а также для всех $i \in I$:

- содержащее аксиомы $[i](p \to q) \to ([i]p \to [i]q)$
- замкнутое относительно правил нормализации: $\varphi \in L \implies [i]\varphi \in L$

Мультимодальные логики

Нормальной мультимодальной логикой называем множество формул L, содержащее все классические тавтологии, замкнутое относительно MP и подстановок, а также для всех $i \in I$:

- содержащее аксиомы $[i](p \to q) \to ([i]p \to [i]q)$
- замкнутое относительно правил нормализации: $\varphi \in L \implies [i]\varphi \in L$

Наименьшую нормальную мультимодальную логику обозначаем K_I.

Можно аналогично определить канонические модели и доказать полноту и корректность K_I относительно класса всех мультимодальных шкал.

Канонические модели

Пусть L – некоторая нормальная логика. Каноническую шкалу определяем как $\mathcal{F}^L = (W^L, \{R_i^L\}_{i \in I})$, где W^L – множество простых L-теорий, а $\Gamma R_i^L \Delta \iff \Gamma_{[i]} \subseteq \Delta$, где $\Gamma_{[i]} = \{\varphi \mid [i]\varphi \in \Gamma\}$

Канонические модели

Пусть L – некоторая нормальная логика. Каноническую шкалу определяем как $\mathcal{F}^L = (W^L, \{R_i^L\}_{i \in I})$, где W^L – множество простых L-теорий, а $\Gamma R_i^L \Delta \iff \Gamma_{[i]} \subseteq \Delta$, где $\Gamma_{[i]} = \{\varphi \mid [i]\varphi \in \Gamma\}$
Каноническая модель как и прежде $\mu^L = (\mathcal{F}^L, \nu^L)$, $\nu^L(p) = \{\Gamma \in W^L \mid p \in \Gamma\}$.

Канонические модели

Пусть L – некоторая нормальная логика. Каноническую шкалу определяем как $\mathcal{F}^L = (W^L, \{R_i^L\}_{i \in I})$, где W^L – множество простых L-теорий, а $\Gamma R_i^L \Delta \iff \Gamma_{[i]} \subseteq \Delta$, где $\Gamma_{[i]} = \{\varphi \mid [i]\varphi \in \Gamma\}$
Каноническая модель как и прежде $\mu^L = (\mathcal{F}^L, \nu^L)$,
$\nu^L(p) = \{\Gamma \in W^L \mid p \in \Gamma\}$.

Лемма

Для любого $i \in I$ верна $\Gamma R_i^L \Delta \iff \Delta^{\langle i \rangle} \subseteq \Gamma$, где $\Delta^{\langle i \rangle} = \{\langle i \rangle \varphi \mid \varphi \in \Delta\}$

Канонические модели

Пусть L – некоторая нормальная логика. Каноническую шкалу определяем как $\mathcal{F}^L = (W^L, \{R_i^L\}_{i \in I})$, где W^L – множество простых L-теорий, а $\Gamma R_i^L \Delta \iff \Gamma_{[i]} \subseteq \Delta$, где $\Gamma_{[i]} = \{\varphi \mid [i]\varphi \in \Gamma\}$
Каноническая модель как и прежде $\mu^L = (\mathcal{F}^L, \nu^L)$, $\nu^L(p) = \{\Gamma \in W^L \mid p \in \Gamma\}$.

Лемма

Для любого $i \in I$ верна $\Gamma R_i^L \Delta \iff \Delta^{\langle i \rangle} \subseteq \Gamma$, где $\Delta^{\langle i \rangle} = \{\langle i \rangle \varphi \mid \varphi \in \Delta\}$

Лемма о расширении

Если $\Sigma \nvdash \varphi$, то существует простая Γ: $\Sigma \subseteq \Gamma$ и $\Gamma \nvdash \varphi$.

Канонические модели

Пусть L – некоторая нормальная логика. Каноническую шкалу определяем как $\mathcal{F}^L = (W^L, \{R_i^L\}_{i \in I})$, где W^L – множество простых L-теорий, а $\Gamma R_i^L \Delta \iff \Gamma_{[i]} \subseteq \Delta$, где $\Gamma_{[i]} = \{\varphi \mid [i]\varphi \in \Gamma\}$
Каноническая модель как и прежде $\mu^L = (\mathcal{F}^L, \nu^L)$,
$\nu^L(p) = \{\Gamma \in W^L \mid p \in \Gamma\}$.

Лемма

Для любого $i \in I$ верна $\Gamma R_i^L \Delta \iff \Delta^{\langle i \rangle} \subseteq \Gamma$, где $\Delta^{\langle i \rangle} = \{\langle i \rangle \varphi \mid \varphi \in \Delta\}$

Лемма о расширении

Если $\Sigma \not\vdash \varphi$, то существует простая Γ: $\Sigma \subseteq \Gamma$ и $\Gamma \not\vdash \varphi$.

Лемма о канонической модели

$\mu^L, \Gamma \Vdash \varphi \iff \varphi \in \Gamma$

Темпоральные логики

Рассмотрим теперь язык, содержащий две модальные связки $[F]$ и $[P]$, которые читаются как "henceforth" (впредь, то есть всегда в дальнейшем) и "hitherto" (до сих пор, то есть всегда до текущего момента). Таким образом, шкалой будут множество W с двумя заданными отношениями R_F и R_P. Миры W естественно называть "моментами времени".

Темпоральные логики

Рассмотрим теперь язык, содержащий две модальные связки $[F]$ и $[P]$, которые читаются как "henceforth" (впредь, то есть всегда в дальнейшем) и "hitherto" (до сих пор, то есть всегда до текущего момента). Таким образом, шкалой будут множество W с двумя заданными отношениями R_F и R_P. Миры W естественно называть "моментами времени".

Для модели μ

$$\mu, t \Vdash [F]\varphi \iff (tR_F s \implies \mu, s \Vdash \varphi)$$

$$\mu, t \Vdash [P]\varphi \iff (tR_P s \implies \mu, s \Vdash \varphi)$$

Темпоральные логики

Рассмотрим теперь язык, содержащий две модальные связки $[F]$ и $[P]$, которые читаются как “henceforth” (впредь, то есть всегда в дальнейшем) и “hitherto” (до сих пор, то есть всегда до текущего момента). Таким образом, шкалой будут множество W с двумя заданными отношениями R_F и R_P. Миры W естественно называть “моментами времени”.
Для модели μ

$$\mu, t \Vdash [F]\varphi \iff (tR_Fs \implies \mu, s \Vdash \varphi)$$

$$\mu, t \Vdash [P]\varphi \iff (tR_Ps \implies \mu, s \Vdash \varphi)$$

Мы бы хотели, чтобы отношения R_F и R_P были согласованы. А именно, $tR_Fs \iff sR_Pt$.

Согласованность

Утверждение

Пусть $\mathcal{F} = (W, R_F, R_P)$ – шкала. Тогда $\mathcal{F} \Vdash p \to [P]\langle F\rangle p$ согда $\forall s \forall t (s R_P t \to t R_F s)$

Согласованность

Утверждение

Пусть $\mathcal{F} = (W, R_F, R_P)$ – шкала. Тогда $\mathcal{F} \Vdash p \to [P]\langle F\rangle p$ согда $\forall s \forall t(sR_P t \to tR_F s)$

Доказательство

- Пусть $\forall s \forall t(sR_P t \to tR_F s)$. Тогда если в мире s верна p и $sR_P t$, то $tR_F s$ и в мире t верна $\langle F\rangle p$.

Согласованность

Утверждение

Пусть $\mathcal{F} = (W, R_F, R_P)$ – шкала. Тогда $\mathcal{F} \Vdash p \to [P]\langle F\rangle p$ согда $\forall s \forall t (s R_P t \to t R_F s)$

Доказательство

- Пусть $\forall s \forall t (s R_P t \to t R_F s)$. Тогда если в мире s верна p и $s R_P t$, то $t R_F s$ и в мире t верна $\langle F\rangle p$.
- Пусть $\exists s, t \colon s R_P t$, но не $t R_F s$. Определим $\nu(p) = s$. Тогда в s верна p, но не $[P]\langle F\rangle p$.

Согласованность

Утверждение

Пусть $\mathcal{F} = (W, R_F, R_P)$ – шкала. Тогда $\mathcal{F} \Vdash p \to [P]\langle F\rangle p$ согда $\forall s \forall t(sR_P t \to tR_F s)$

Доказательство

- Пусть $\forall s \forall t(sR_P t \to tR_F s)$. Тогда если в мире s верна p и $sR_P t$, то $tR_F s$ и в мире t верна $\langle F\rangle p$.
- Пусть $\exists s, t \colon sR_P t$, но не $tR_F s$. Определим $\nu(p) = s$. Тогда в s верна p, но не $[P]\langle F\rangle p$.

Утверждение

$\mathcal{F} \Vdash p \to [F]\langle P\rangle p$ согда $\forall s \forall t(sR_F t \to tR_P s)$

Согласованность

Утверждение

Пусть L – нормальная бимодальная логика и $p \to [P]\langle F\rangle p \in L$. Тогда $\forall \Gamma, \Delta\ (\Gamma R^L_P \Delta \to \Delta R^L_F \Gamma)$.

Согласованность

Утверждение

Пусть L – нормальная бимодальная логика и $p \to [P]\langle F\rangle p \in L$. Тогда $\forall \Gamma, \Delta\ (\Gamma R^L_P \Delta \to \Delta R^L_F \Gamma)$.

Доказательство

$\Gamma R^L_P \Delta \iff \Gamma_{[P]} \subseteq \Delta$

Хотим доказать, что $\Delta R^L_F \Gamma$. Это равносильно $\Gamma^{\langle F\rangle} \subseteq \Delta$

Пусть $\varphi \in \Gamma$. Тогда $[P]\langle F\rangle\varphi \in \Gamma$, то есть $\langle F\rangle\varphi \in \Delta$.

Согласованность

Утверждение

Пусть L – нормальная бимодальная логика и $p \to [P]\langle F\rangle p \in L$. Тогда $\forall \Gamma, \Delta\ (\Gamma R^L_P \Delta \to \Delta R^L_F \Gamma)$.

Доказательство

$\Gamma R^L_P \Delta \iff \Gamma_{[P]} \subseteq \Delta$

Хотим доказать, что $\Delta R^L_F \Gamma$. Это равносильно $\Gamma^{\langle F\rangle} \subseteq \Delta$

Пусть $\varphi \in \Gamma$. Тогда $[P]\langle F\rangle\varphi \in \Gamma$, то есть $\langle F\rangle\varphi \in \Delta$.

Утверждение

Пусть L – нормальная бимодальная логика и $p \to [F]\langle P\rangle p \in L$. Тогда $\forall \Gamma, \Delta\ (\Gamma R^L_F \Delta \to \Delta R^L_P \Gamma)$.

Темпоральные логики

Таким образом, если мы потребуем выполнение аксиом $p \to [P]\langle F\rangle p$ и $p \to [F]\langle P\rangle p$, то шкалы, в которых эти аксиомы истинны, по существу будут шкалами с одним отношением, а не двумя (если R_F это $\leqslant$, то R_P это $\geqslant$).

Темпоральные логики

Таким образом, если мы потребуем выполнение аксиом $p \to [P]\langle F\rangle p$ и $p \to [F]\langle P\rangle p$, то шкалы, в которых эти аксиомы истинны, по существу будут шкалами с одним отношением, а не двумя (если R_F это $\leqslant$, то R_P это $\geqslant$).
К тому же, поскольку мы говорим о времени, мы бы хотели потребовать транзитивность $R_F = \leqslant$. Это несложно выразить модальной формулой $[F]p \to [F][F]p$. Транзитивность R_P при условии согласованности получится автоматически.

Темпоральные логики

Таким образом, если мы потребуем выполнение аксиом $p \to [P]\langle F\rangle p$ и $p \to [F]\langle P\rangle p$, то шкалы, в которых эти аксиомы истинны, по существу будут шкалами с одним отношением, а не двумя (если R_F это $\leqslant$, то R_P это $\geqslant$).
К тому же, поскольку мы говорим о времени, мы бы хотели потребовать транзитивность $R_F = \leqslant$. Это несложно выразить модальной формулой $[F]p \to [F][F]p$. Транзитивность R_P при условии согласованности получится автоматически.
Таким образом, темпоральная логика в $[F], [P]$-языке это нормальная бимодальная логика, содержащая эти три аксиомы.

Темпоральные логики

Таким образом, если мы потребуем выполнение аксиом $p \to [P]\langle F\rangle p$ и $p \to [F]\langle P\rangle p$, то шкалы, в которых эти аксиомы истинны, по существу будут шкалами с одним отношением, а не двумя (если R_F это $\leqslant$, то R_P это $\geqslant$).

К тому же, поскольку мы говорим о времени, мы бы хотели потребовать транзитивность $R_F = \leqslant$. Это несложно выразить модальной формулой $[F]p \to [F][F]p$. Транзитивность R_P при условии согласованности получится автоматически.

Таким образом, темпоральная логика в $[F], [P]$-языке это нормальная бимодальная логика, содержащая эти три аксиомы.

Из последних двух утверждений сразу получаем, что наименьшая темпоральная логика K_t полна относительно всех шкал с согласованными транзитивными порядками.

Темпоральные логики

Таким образом, если мы потребуем выполнение аксиом $p \to [P]\langle F\rangle p$ и $p \to [F]\langle P\rangle p$, то шкалы, в которых эти аксиомы истинны, по существу будут шкалами с одним отношением, а не двумя (если R_F это $\leqslant$, то R_P это $\geqslant$).
К тому же, поскольку мы говорим о времени, мы бы хотели потребовать транзитивность $R_F = \leqslant$. Это несложно выразить модальной формулой $[F]p \to [F][F]p$. Транзитивность R_P при условии согласованности получится автоматически.
Таким образом, темпоральная логика в $[F], [P]$-языке это нормальная бимодальная логика, содержащая эти три аксиомы.
Из последних двух утверждений сразу получаем, что наименьшая темпоральная логика K_t полна относительно всех шкал с согласованными транзитивными порядками.
Мы показали связь темпоральных логик в самом простом языке с мультимодальными логиками, но для удобства дадим альтернативное их описание.

Временные шкалы

Временной шкалой называем пару $\mathcal{T} = (T, <)$, где $< \subseteq T \times T$ – транзитивное и иррефлексивное отношение.
Если $s < t$, то говорим, что момент s раньше момента t.
Множество $\{s \in T \mid t < s\}$ называем будущим момента t. Аналогично для прошлого.
Заметим, что такое определение не допускает циклического времени.

Некоторые свойства шкал

- Неветвящееся будущее:
  $\forall xyz(x < y \land x < z \to y < z \lor y = z \lor z < y)$
  Пример ветвящегося: подвешенное дерево, вершины которого упорядочены по включению путей до корня.

Некоторые свойства шкал

- Неветвящееся будущее:
  $\forall xyz(x < y \wedge x < z \to y < z \vee y = z \vee z < y)$
  Пример ветвящегося: подвешенное дерево, вершины которого упорядочены по включению путей до корня.
- Неветвящееся прошлое:
  $\forall xyz(y < x \wedge z < x \to y < z \vee y = z \vee z < y)$

Некоторые свойства шкал

- Неветвящееся будущее:
  $\forall xyz(x < y \wedge x < z \to y < z \vee y = z \vee z < y)$
  Пример ветвящегося: подвешенное дерево, вершины которого упорядочены по включению путей до корня.
- Неветвящееся прошлое:
  $\forall xyz(y < x \wedge z < x \to y < z \vee y = z \vee z < y)$
- Плотность: $\forall xy(x < y \to \exists z\colon x < z \wedge z < y)$

Некоторые свойства шкал

- Неветвящееся будущее:
  $\forall xyz(x < y \wedge x < z \to y < z \vee y = z \vee z < y)$
  Пример ветвящегося: подвешенное дерево, вершины которого упорядочены по включению путей до корня.
- Неветвящееся прошлое:
  $\forall xyz(y < x \wedge z < x \to y < z \vee y = z \vee z < y)$
- Плотность: $\forall xy(x < y \to \exists z\colon x < z \wedge z < y)$
- Дискретность: $\forall xy(x < y \to \exists z(x < z \wedge \neg\exists u(x < u \wedge u < z)))$

Некоторые свойства шкал

- Неветвящееся будущее:
  $\forall xyz(x < y \wedge x < z \to y < z \vee y = z \vee z < y)$
  Пример ветвящегося: подвешенное дерево, вершины которого упорядочены по включению путей до корня.
- Неветвящееся прошлое:
  $\forall xyz(y < x \wedge z < x \to y < z \vee y = z \vee z < y)$
- Плотность: $\forall xy(x < y \to \exists z\colon x < z \wedge z < y)$
- Дискретность: $\forall xy(x < y \to \exists z(x < z \wedge \neg\exists u(x < u \wedge u < z)))$
- Непрерывность – второпорядковое свойство.

Некоторые свойства шкал

- Неветвящееся будущее:
  $\forall xyz(x < y \wedge x < z \to y < z \vee y = z \vee z < y)$
  Пример ветвящегося: подвешенное дерево, вершины которого упорядочены по включению путей до корня.
- Неветвящееся прошлое:
  $\forall xyz(y < x \wedge z < x \to y < z \vee y = z \vee z < y)$
- Плотность: $\forall xy(x < y \to \exists z \colon x < z \wedge z < y)$
- Дискретность: $\forall xy(x < y \to \exists z(x < z \wedge \neg\exists u(x < u \wedge u < z)))$
- Непрерывность – второпорядковое свойство.
- Однородность временной структуры: для любых моментов $s, t \in T$ существует автоморфизм $\varphi_{s,t} \colon T \to T$, т.ч. $\varphi_{s,t}(s) = t$.

Язык и модели

Как и раньше, рассматриваем язык классической логики с двумя модальными связками $[F]$ и $[P]$, которые иногда называют G и H. Также вводим обозначения $\Diamond\varphi = \langle P\rangle\varphi \vee \varphi \vee \langle F\rangle\varphi$ и $\Box\varphi = [P]\varphi \wedge \varphi \wedge [F]\varphi$.

Имея формулу φ, можно рассмотреть её *зеркальный образ* – формулу, получающуюся одновременной заменой в φ всех $[F]$ на $[P]$ и наоборот.

Язык и модели

Как и раньше, рассматриваем язык классической логики с двумя модальными связками $[F]$ и $[P]$, которые иногда называют G и H.
Также вводим обозначения $\Diamond\varphi = \langle P\rangle\varphi \vee \varphi \vee \langle F\rangle\varphi$ и $\Box\varphi = [P]\varphi \wedge \varphi \wedge [F]\varphi$.
Имея формулу φ, можно рассмотреть её *зеркальный образ* – формулу, получающуюся одновременной заменой в φ всех $[F]$ на $[P]$ и наоборот.
Моделью называем пару $\mu = (\mathcal{T}, \nu)$, где $\nu\colon \mathrm{Prop} \to 2^T$.
Истинность определяется стандартным образом.

Пример

Рассмотрим шкалу $(\omega, <)$. Пусть $\mu = (\omega, \nu)$ – некоторая модель, и $\nu_q = \{1000, 1001, \dots\}$, $\nu_r = \{0, 2, 4, \dots\}$. Тогда формула $\langle F\rangle[F]q$ верна в любом состоянии, а формула $\langle F\rangle[F]r$ не верна нигде. А вот формула $[F]\langle F\rangle r$ верна.

Некоторые свойства шкал

- Шкала плотная $\iff$ в ней верна формула $\langle F\rangle p \to \langle F\rangle\langle F\rangle p$

Некоторые свойства шкал

- Шкала плотная $\iff$ в ней верна формула $\langle F\rangle p \to \langle F\rangle\langle F\rangle p$
- Шкала дискретная $\iff$ верна $(\langle F\rangle\top \wedge q \wedge [P]q) \to \langle F\rangle[P]q$

Некоторые свойства шкал

- Шкала плотная $\iff$ в ней верна формула $\langle F\rangle p \to \langle F\rangle\langle F\rangle p$
- Шкала дискретная $\iff$ верна $(\langle F\rangle\top \wedge q \wedge [P]q) \to \langle F\rangle[P]q$
- В шкале неветвящееся будущее $\iff$ верна $\langle P\rangle\langle F\rangle q \to (\langle P\rangle q \vee q \vee \langle F\rangle q)$

Некоторые свойства шкал

- Шкала плотная $\iff$ в ней верна формула $\langle F\rangle p \to \langle F\rangle\langle F\rangle p$
- Шкала дискретная $\iff$ верна $(\langle F\rangle\top \wedge q \wedge [P]q) \to \langle F\rangle[P]q$
- В шкале неветвящееся будущее $\iff$ верна $\langle P\rangle\langle F\rangle q \to (\langle P\rangle q \vee q \vee \langle F\rangle q)$
- Линейный порядок непрерывный $\iff$ верна $\Box([P]q \to \langle F\rangle[P]q) \to ([P]q \to [F]q)$

Некоторые свойства шкал

- Шкала плотная $\iff$ в ней верна формула $\langle F\rangle p \to \langle F\rangle\langle F\rangle p$
- Шкала дискретная $\iff$ верна $(\langle F\rangle\top \wedge q \wedge [P]q) \to \langle F\rangle[P]q$
- В шкале неветвящееся будущее $\iff$ верна $\langle P\rangle\langle F\rangle q \to (\langle P\rangle q \vee q \vee \langle F\rangle q)$
- Линейный порядок непрерывный $\iff$ верна $\Box([P]q \to \langle F\rangle[P]q) \to ([P]q \to [F]q)$

Доказательство

Действительно, пусть порядок непрерывный. Пусть в мире t верны $\Box([P]q \to \langle F\rangle[P]q)$ и $[P]q$. Предположим, что не $[F]q$, то есть что $\exists s\colon t < s$ и $t \notin \nu(q)$.

Некоторые свойства шкал

- Шкала плотная $\iff$ в ней верна формула $\langle F\rangle p \to \langle F\rangle\langle F\rangle p$
- Шкала дискретная $\iff$ верна $(\langle F\rangle\top \wedge q \wedge [P]q) \to \langle F\rangle[P]q$
- В шкале неветвящееся будущее $\iff$ верна $\langle P\rangle\langle F\rangle q \to (\langle P\rangle q \vee q \vee \langle F\rangle q)$
- Линейный порядок непрерывный $\iff$ верна $\Box([P]q \to \langle F\rangle[P]q) \to ([P]q \to [F]q)$

Доказательство

Действительно, пусть порядок непрерывный. Пусть в мире t верны $\Box([P]q \to \langle F\rangle[P]q)$ и $[P]q$. Предположим, что не $[F]q$, то есть что $\exists s\colon t < s$ и $t \notin \nu(q)$. Рассмотрим множество $A = \{x \in T \mid \mu, x \Vdash q \wedge [P]q\}$ и его дополнение $B = T \backslash A$. $t \in A$, то есть A не пусто. $s \in B$, то есть B не пусто.

Некоторые свойства шкал

- Шкала плотная $\iff$ в ней верна формула $\langle F\rangle p \to \langle F\rangle\langle F\rangle p$
- Шкала дискретная $\iff$ верна $(\langle F\rangle\top \wedge q \wedge [P]q) \to \langle F\rangle[P]q$
- В шкале неветвящееся будущее $\iff$ верна $\langle P\rangle\langle F\rangle q \to (\langle P\rangle q \vee q \vee \langle F\rangle q)$
- Линейный порядок непрерывный $\iff$ верна $\Box([P]q \to \langle F\rangle[P]q) \to ([P]q \to [F]q)$

Доказательство

Действительно, пусть порядок непрерывный. Пусть в мире t верны $\Box([P]q \to \langle F\rangle[P]q)$ и $[P]q$. Предположим, что не $[F]q$, то есть что $\exists s\colon t < s$ и $t \notin \nu(q)$. Рассмотрим множество $A = \{x \in T \mid \mu, x \Vdash q \wedge [P]q\}$ и его дополнение $B = T \setminus A$. $t \in A$, то есть A не пусто. $s \in B$, то есть B не пусто. Они образуют сечение T, а значит, $\exists z\colon A \leqslant z \leqslant B$. Если $\nu, z \Vdash [P]q$, то $\nu, z \Vdash \langle F\rangle[P]q$, что противоречит с $A \leqslant z$. Если $\nu, z \nVdash [P]q$, то $z \nleqslant B$.

Некоторые свойства шкал

- Линейный порядок непрерывный $\iff$ верна $\Box([P]q \to \langle F\rangle[P]q) \to ([P]q \to [F]q)$

Доказательство

Действительно, пусть не порядок непрерывный. Тогда существуют непустые A, B: $A \cap B = \varnothing$, $A \cup B = T$, $A \leqslant B$, но $\forall z, A \nleqslant z \vee z \nleqslant B$.

Некоторые свойства шкал

- Линейный порядок непрерывный $\iff$ верна $\Box([P]q \to \langle F\rangle[P]q) \to ([P]q \to [F]q)$

Доказательство

Действительно, пусть не порядок непрерывный. Тогда существуют непустые A, B: $A \cap B = \varnothing$, $A \cup B = T$, $A \leqslant B$, но $\forall z, A \nleqslant z \vee z \nleqslant B$. Определим $\nu(q) = A$. Возьмём произвольное $t \in A$. Ясно, что $\mu, t \Vdash \Box([P]q \to \langle F\rangle[P]q)$ и $\mu, t \Vdash [P]q$, но, тем не менее, $\mu, t \nVdash [F]q$

Аксиоматика

Мы уже получали аксиоматику наименьшей темпоральной логики K_t:

- Классические тавтологии (или любой другой набор аксиом CL)
- $[F](p \to q) \to ([F]p \to [F]q)$ и $[P](p \to q) \to ([P]p \to [P]q)$
- $q \to [P]\langle F\rangle q$ и $q \to [F]\langle P\rangle q$
- $[F]q \to [F][F]q$

Правда, мы показывали полноту относительно класса шкал с необязательно иррефлексивным отношением следования. Но относительно класса шкал с иррефелксивным отношением она тоже будет, то есть требование иррефлексивности не добавляет никаких новых общезначимых формул.

Аксиоматика

Также рассмотрим Lin $= K_t + \mathrm{NBF} + \mathrm{NBP}$, где
$\mathrm{NBF} = \langle P\rangle\langle F\rangle q \to (\langle P\rangle q \vee q \vee \langle F\rangle q)$ и
$\mathrm{NBP} = \langle F\rangle\langle P\rangle q \to (\langle F\rangle q \vee q \vee \langle P\rangle q)$.
Класс шкал, относительно которых она корректна – это шкалы с неветвящимися будущим и прошлым. От линейных они отличаются тем, что допускают наличие "параллельных" "линий времени". Тем не менее, это неважно. Логика Lin полна относительно класса всех линейных шкал.

Полнота Lin

Теорема

Логика Lin полна относительно класса линейных шкал.

Набросок доказательства

Из аксиом *NBF* и *NBP* следует, что в канонической шкале нет ветвлений будущего и прошлого.
Проблема в том, что каноническая шкала не обязательно линейна.
Во-первых, в ней могут быть "параллельные" "таймлайны", но это не страшно, поскольку можно рассматривать порожденные подмодели.

Полнота Lin

Теорема

Логика Lin полна относительно класса линейных шкал.

Набросок доказательства

Из аксиом *NBF* и *NBP* следует, что в канонической шкале нет ветвлений будущего и прошлого.
Проблема в том, что каноническая шкала не обязательно линейна.
Во-первых, в ней могут быть “параллельные” “таймлайны”, но это не страшно, поскольку можно рассматривать порожденные подмодели.
Во-вторых, отношение достижимости вообще говоря не будет иррефлексивным. Это так просто не обойти.

Полнота Lin

Набросок доказательства

Мы сделаем из порожденной подмодели модель с линейной шкалой. Для этого нужно разбить миры на “кластеры” двух видов: вырожденные, состоящие из одного мира, недостижимого из себя же, и невырожденные, в которых любые два (не обязательно различных) мира достижимы друг из друга. Естественно, каждый кластер мы выбираем максимальным по включению (из класса пересекающихся с ним).

Полнота Lin

Набросок доказательства

Мы сделаем из порожденной подмодели модель с линейной шкалой. Для этого нужно разбить миры на "кластеры" двух видов: вырожденные, состоящие из одного мира, недостижимого из себя же, и невырожденные, в которых любые два (не обязательно различных) мира достижимы друг из друга. Естественно, каждый кластер мы выбираем максимальным по включению (из класса пересекающихся с ним).
На множестве всех кластеров естественным образом определяется линейный порядок. Мы хотим "заменить" каждый кластер на некоторую линейную модель и собрать из этих моделей одну большую.

Полнота Lin

Набросок доказательства

Пусть C – кластер, а ν – означивание на нём. Определим произвольный линейный порядок R на C. Кластер C мы заменим на $((C, R) \times (\mathbb{Z}, <), \nu')$, где $\nu'(p) = \nu(p) \times \mathbb{Z}$.

Полнота Lin

Набросок доказательства

Пусть C – кластер, а ν – означивание на нём. Определим произвольный линейный порядок R на C. Кластер C мы заменим на $((C, R) \times (\mathbb{Z}, <), \nu')$, где $\nu'(p) = \nu(p) \times \mathbb{Z}$.
Пусть теперь φ формула. Простой теории Γ в новой модели соответствует не один мир, а счетное семейство миров $\{(\Gamma, i) \mid i \in \mathbb{Z}\}$.
Тем не менее, можно доказать, что $(\Gamma, i) \Vdash \varphi \iff \varphi \in \Gamma$.

Аксиоматика

Также можно выписать аксиомы теории $(\mathbb{N}, <), (\mathbb{Z}, <), (\mathbb{Q}, <), (\mathbb{R}, <)$.
Это аксиомы Lin +

- правая сериальность, наличие наименьшего элемента, дискретность
- правая и левая сериальность, дискретность
- правая и левая сериальность, плотность
- правая и левая сериальность, плотность, непрерывность

Until и Since

Можно расширить язык, добавив два новых оператора U и S. Семантику доопределим как

$$\mu, t \Vdash \varphi U \psi \iff \exists s > t \colon \mu, s \Vdash \psi \text{ и } \forall u, t < u < s \to \mu, u \Vdash \varphi$$

$$\mu, t \Vdash \varphi S \psi \iff \exists s < t \colon \mu, s \Vdash \psi \text{ и } \forall u, s < u < t \to \mu, u \Vdash \varphi$$

Until и Since

Можно расширить язык, добавив два новых оператора U и S. Семантику доопределим как

$$\mu, t \Vdash \varphi U \psi \iff \exists s > t\colon \mu, s \Vdash \psi \text{ и } \forall u, t < u < s \to \mu, u \Vdash \varphi$$

$$\mu, t \Vdash \varphi S \psi \iff \exists s < t\colon \mu, s \Vdash \psi \text{ и } \forall u, s < u < t \to \mu, u \Vdash \varphi$$

На самом деле $\langle F \rangle \varphi$ и $\langle P \rangle \varphi$ выражаются как $\top U \varphi$ и $\top S \varphi$.

Until и Since

Можно расширить язык, добавив два новых оператора U и S. Семантику доопределим как

$$\mu, t \Vdash \varphi U \psi \iff \exists s > t\colon \mu, s \Vdash \psi \text{ и } \forall u, t < u < s \to \mu, u \Vdash \varphi$$

$$\mu, t \Vdash \varphi S \psi \iff \exists s < t\colon \mu, s \Vdash \psi \text{ и } \forall u, s < u < t \to \mu, u \Vdash \varphi$$

На самом деле $\langle F \rangle \varphi$ и $\langle P \rangle \varphi$ выражаются как $\top U \varphi$ и $\top S \varphi$. Более того, верна

Теорема (Ганс Камп)

Любой модальный оператор, чья истинность выразима в первопорядковой логике, выражается через U и S над классом линейных непрерывных шкал.

Until и Since

Можно расширить язык, добавив два новых оператора U и S. Семантику доопределим как

$$\mu, t \Vdash \varphi U \psi \iff \exists s > t\colon \mu, s \Vdash \psi \text{ и } \forall u, t < u < s \to \mu, u \Vdash \varphi$$

$$\mu, t \Vdash \varphi S \psi \iff \exists s < t\colon \mu, s \Vdash \psi \text{ и } \forall u, s < u < t \to \mu, u \Vdash \varphi$$

На самом деле $\langle F \rangle \varphi$ и $\langle P \rangle \varphi$ выражаются как $\top U \varphi$ и $\top S \varphi$. Более того, верна

Теорема (Ганс Камп)

Любой модальный оператор, чья истинность выразима в первопорядковой логике, выражается через U и S над классом линейных непрерывных шкал.

Другой важный пример – оператор X, означающий "в следующий момент времени". Он выражается как $X\varphi = \bot U \varphi$

Вопросы?

Вопросы?