Ультрапроизведения и теорема Лося

Александр Грефенштейн

8 декабря 2020

Прямые произведения множеств и структур

Пусть $\{A_i\}_{i\in I}$ — некоторое индексированное семейство множеств.

Определим прямое произведение этого семейства как:

$$\Pi_{i\in I}A_i := \{\alpha \ - \ \text{функция} \mid dom(\alpha) = I \text{ и } \forall i \in I \ \ \alpha(i) \in A_i\}$$

Далее, фиксируя сигнатуру σ, можно определить прямое произведение семейства σ-структур $\{\mathfrak{A}_i\}_{i\in I}$ (обозначаемое как $\mathfrak{A} := \Pi_{i\in I}\mathfrak{A}_i$):

- Носитель — $\Pi_{i\in I}A_i$
- $\forall p \in Pred_\sigma \quad p^{\mathfrak{A}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \iff p^{\mathfrak{A}_i}(\alpha_1(i), \ldots, \alpha_n(i)) \ \ (\forall i \in I)$
- $\forall f \in Func_\sigma \quad f^{\mathfrak{A}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)(i) = f^{\mathfrak{A}_i}(\alpha_1(i), \ldots, \alpha_n(i)) \ \ (\forall i \in I)$
- $\forall c \in Const_\sigma \quad c^{\mathfrak{A}}(i) = c^{\mathfrak{A}_i} \ \ (\forall i \in I)$

Прямые произведения множеств и структур

Договоримся о некоторых сокращениях:

- $\overline{x} := (x_1, \ldots, x_k)$ и аналогично с $\overline{\alpha}$
- $\overline{\alpha}(i) := (\alpha_1(i), \ldots, \alpha_k(i))$

Предложение (о прямом произведении)

Пусть формула $\Phi(\overline{x})$ построенна из атомарных формул только с помощью связок $\{\wedge, \forall, \exists\}$. Если $\mathfrak{A} = \Pi_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \Pi_{i \in I} A_i$, то

$$\mathfrak{A} \Vdash \Phi(\overline{\alpha}) \iff \forall i \in I \;\; \mathfrak{A}_i \Vdash \Phi(\overline{\alpha}(i))$$

Доказательство

Сначала докажем, что $\forall i \in I$

$$(t^{\mathfrak{A}}(\overline{\alpha}))(i) = t^{\mathfrak{A}_i}(\overline{\alpha}(i))$$

Прямые произведения множеств и структур

Для переменных и констант — тривиально.

Рассмотрим случай $t(\overline{x}) = f(t_1(\overline{x}), \ldots, t_n(\overline{x}))$:

$$(t^{\mathfrak{A}}(\overline{\alpha}))(i) = f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}(\overline{\alpha}), \ldots, t_n^{\mathfrak{A}}(\overline{\alpha}))(i) =$$

$$= f^{\mathfrak{A}_i}((t_1^{\mathfrak{A}}(\overline{\alpha}))(i), \ldots, (t_n^{\mathfrak{A}}(\overline{\alpha}))(i)) =$$

$$= f^{\mathfrak{A}_i}(t_1^{\mathfrak{A}_i}(\overline{\alpha}(i)), \ldots, t_n^{\mathfrak{A}_i}(\overline{\alpha}(i))) = t^{\mathfrak{A}_i}(\overline{\alpha}(i))$$

Теперь с помощью этого факта уже докажем предложение:

1) Пусть $\Phi = p(\overline{x})$, тогда

$$\mathfrak{A} \Vdash \Phi(\overline{\alpha}) \iff p^{\mathfrak{A}}(\overline{\alpha}) \iff p^{\mathfrak{A}_i}((t_1^{\mathfrak{A}}(\overline{\alpha}))(i), \ldots, (t_n^{\mathfrak{A}}(\overline{\alpha}))(i)) \ (\forall i \in I)$$

$$\iff p^{\mathfrak{A}_i}(t_1^{\mathfrak{A}_i}(\overline{\alpha}(i)), \ldots, t_n^{\mathfrak{A}_i}(\overline{\alpha}(i))) \ (\forall i \in I)$$

$$\iff \mathfrak{A}_i \Vdash \Phi(\overline{\alpha}(i)) \ (\forall i \in I)$$

Прямые произведения множеств и структур

2) $\Phi(\overline{x}) = \Phi_1(\overline{x}) \wedge \Phi_2(\overline{x})$ — разбирается легко.

3) Кванторные случаи разбираются похожим способом, сделаем для $\exists$
Пусть $\Phi(\overline{x}) = \exists y \ \Psi(\overline{x}, y)$, тогда:

$$\mathfrak{A} \Vdash \Phi(\overline{\alpha}) \iff \exists\beta\ \mathfrak{A} \Vdash \Psi(\overline{\alpha}, \beta) \iff$$

$$\iff \exists\beta\ \mathfrak{A}_i \Vdash \Psi(\overline{\alpha}(i), \beta(i))\ (\forall i \in I) \iff \mathfrak{A}_i \Vdash \Phi(\overline{\alpha}(i))\ (\forall i \in I)$$

■

Фильтры и ультрафильтры

Пусть $I \neq \emptyset$. Семейство множеств $F \subseteq \mathcal{P}(I)$ назовём центрированным, если для любого конечного числа множеств $A_i \in F$

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \neq \emptyset$$

Также будем называть F фильтром на I, если верны условия:

1. $\emptyset \notin F$ и $I \in F$
2. $A, B \in F \implies A \cap B \in F$
3. $A \subseteq B \subseteq I$ и $A \in F \implies B \in F$

Если дополнительно $\forall A \subseteq I \quad A \in F$ или $\overline{A} \in F$, то F называется ультрафильтром.

Фильтры и ультрафильтры

Теорема (о существовании ультрафильтров)

а) Любое центрированное семейство множеств может быть расширено до фильтра.

б) Любой фильтр может быть расширен до ультрафильтра.

Доказательство

а) Пусть F_0 — центрированное множество.
Если $F_0 = \emptyset$, то $F_1 = \{I\}$ его расширяет и является фильтром.

Если $F_0 \neq \emptyset$, то легко понять, что

$$F_1 = \{B \in \mathcal{P}(I) \mid A_1 \cap \ldots \cap A_n \subseteq B \text{ для некоторых } A_i \in F_0,\ n \geqslant 1\}$$

расширяет F_0 и является фильтром.

Фильтры и ультрафильтры

б) Пусть F_1 — фильтр на I. Воспользуемся Леммой Цорна:

Рассмотрим множество

$$M := \{F \mid F \ - \ \text{фильтр на } I \text{ и } F_1 \subseteq F\}$$

тогда $(M, \subseteq)$ — ч.у.м.

Пусть L — цепь в M.

1. Если $L = \emptyset$, то её верхняя грань это F_1.
2. Пусть $L \neq \emptyset$, тогда $F^* = \bigcup_{F \in L} F$ является верхней гранью, что можно просто проверить.

Таким образом, существует максимальный элемент в $(M, \subseteq)$; обозначим его за F_2 и докажем, что он и есть ультрафильтр.

От противного: пусть F_2 не ультрафильтр.

Значит существует множество $A \subseteq I$, такое что ни оно само, ни его дополнение не лежат в F_2. Но тогда $F_2 \cup \{A\}$ и $F_2 \cup \{\overline{A}\}$ не являются центрированными. Расписывая этот факт по определению, получим противоречие.

∎

Фильтрованные произведения структур

Теперь зафиксируем ещё дополнительно F — фильтр на I.

Если $\{A_i\}_{i \in I}$ — носители соответствующих структур, то зададим на $\Pi_{i \in I} A_i$ отношение эквивалентности $\sim_F$:

$$\alpha \sim_F \beta \iff \{i \in I \mid \alpha(i) = \beta(i)\} \in F$$

Это действительно эквивалентность. Будем обозначать класс эквивалентности $\alpha/_{\sim_F}$ как α/F.

Пусть $\mathfrak{A} = \Pi_{i \in I} \mathfrak{A}_i$.
И для краткости обозначим $\overline{\alpha}/F := (\alpha_1/F, \ldots, \alpha_k/F)$

Определим фильтрованное произведение семейства $\{\mathfrak{A}_i\}_{i \in I}$ по фильтру F на I ($\mathfrak{A}' := \Pi^F_{i \in I} \mathfrak{A}_i$)

- Носитель — $A' := \{\alpha/F \mid \alpha \in \Pi_{i \in I} A_i\}$
- если $p \in Pred_\sigma \implies p^{\mathfrak{A}'}(\overline{\alpha}/F) \iff \{i \in I \mid p^{\mathfrak{A}_i}(\overline{\alpha}(i))\} \in F$
- если $f \in Func_\sigma \implies f^{\mathfrak{A}'}(\overline{\alpha}/F) = f^{\mathfrak{A}}(\overline{\alpha})/F$
- если $c \in Const_\sigma \implies c^{\mathfrak{A}'} = c^{\mathfrak{A}}/F$

Конечно, в определении есть неоднозначность, вследствие использования классов эквивалентности, однако утверждается, что это тоже σ-структура и её определение корректно.

Лемма

Определение фильтрованного произведения семейства структур корректно.

Доказательство

Пусть α_j и β_j представляют одни и те же классы эквивалентности для подходящих j.

1) Докажем, что

$$f^{\mathfrak{A}}(\overline{\alpha})/F = f^{\mathfrak{A}}(\overline{\beta})/F$$

$$E = \{i \in I \mid f^{\mathfrak{A}}(\overline{\alpha})(i) = f^{\mathfrak{A}}(\overline{\beta})(i)\} = \{i \in I \mid f^{\mathfrak{A}_i}(\overline{\alpha}(i)) = f^{\mathfrak{A}_i}(\overline{\beta}(i))\}$$

и если $E_s := \{i \in I \mid \alpha_s(i) = \beta_s(i)\} \in F$ (по условию), то

$$F \ni E_1 \cap \ldots \cap E_k \subseteq E \implies E \in F$$

Фильтрованные произведения структур

2) Докажем для предикатных символов:

Пусть $I_1 = \{i \in I \mid P^{\mathfrak{A}_i}(\overline{\alpha}(i))\} \in F$. Если $I_2 = \{i \in I \mid P^{\mathfrak{A}_i}(\overline{\beta}(i))\}$, то :

$$F \ni I_1 \cap E_1 \cap \ldots \cap E_k \subseteq I_2 \implies I_2 \in F$$

$\blacksquare$

Фильтруемые формулы и теорема Лося

Пусть $\Phi(\overline{x}) \in Form_\sigma$.

Говорим, что $\Phi(\overline{x})$ фильтруется по фильтру F, если для любого семейства σ-структур $\{\mathfrak{A}_i\}_{i\in I}$ и любых элементов $\overline{\alpha}/F$ носителя $\Pi^F_{i\in I}\mathfrak{A}_i$

$$\Pi^F_{i\in I}\mathfrak{A}_i \Vdash \Phi(\overline{\alpha}/F) \iff \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \Vdash \Phi(\overline{\alpha}(i))\} \in F$$

Теорема (Лося)

Любая формула фильтруется по любому ультрафильтру.

Для атомарных формул требование можно ослабить: они фильтруются по любому фильтру.
Также широко известно, что в *FOCL* любая формула Φ семантически эквивалентна некоторой формуле Φ', в которой нет связок $\{\wedge, \rightarrow, \forall\}$.
Воспользуемся этим фактом в доказательстве теоремы.

Фильтруемые формулы и теорема Лося

Индукцией по длине терма можно показать, что

$$t^{\mathfrak{A}'}(\overline{\alpha}/F) = t^{\mathfrak{A}}(\overline{\alpha})/F$$

Доказательство

1) Пусть $\Phi(\overline{x}) = p(t_1(\overline{x}), \ldots, t_n(\overline{x}))$, тогда:

$$\mathfrak{A}' \Vdash \Phi(\overline{\alpha}/F) \iff p^{\mathfrak{A}'}(t_1^{\mathfrak{A}'}(\overline{\alpha}/F), \ldots, t_n^{\mathfrak{A}'}(\overline{\alpha}/F)) \iff$$

$$\iff p^{\mathfrak{A}'}(t_1^{\mathfrak{A}}(\overline{\alpha})/F, \ldots, t_n^{\mathfrak{A}}(\overline{\alpha})/F)$$

$$\iff \{i \in I \mid p^{\mathfrak{A}_i}(t_1^{\mathfrak{A}}(\overline{\alpha})(i), \ldots, t_n^{\mathfrak{A}}(\overline{\alpha})(i))\} \in F$$

$$\iff \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \Vdash \Phi(\overline{\alpha}(i))\} = \{i \in I \mid p^{\mathfrak{A}_i}(t_1^{\mathfrak{A}}(\overline{\alpha}(i)), \ldots, t_n^{\mathfrak{A}}(\overline{\alpha}(i)))\} \in F$$

Фильтруемые формулы и теорема Лося

2) $\Phi(\overline{x}) = \neg\Psi(\overline{x})$. Заметим, что для любых $I_1 \subseteq I$ верно:

$$I_1 \in F \iff \overline{I_1} \notin F$$

Тогда если $I_1 = \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \Vdash \Phi(\overline{\alpha}(i))\}$, то $\overline{I_1} = \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \Vdash \Psi(\overline{\alpha}(i))\}$

$$\mathfrak{A}' \Vdash \Phi(\overline{\alpha}/F) \iff \mathfrak{A}' \nVdash \Psi(\overline{\alpha}/F) \iff \overline{I_1} \notin F \iff I_1 \in F$$

3) $\Phi(\overline{x}) = \Phi_1(\overline{x}) \wedge \Phi_2(\overline{x})$. Пусть

$$I_1 = \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \Vdash \Phi_1(\overline{\alpha}(i))\} \quad I_2 = \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \Vdash \Phi_2(\overline{\alpha}(i))\}$$

Тогда очевидно, что $\{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \Vdash \Phi(\overline{\alpha}(i))\} = I_1 \cap I_2$, а значит:

$$\mathfrak{A}' \Vdash \Phi(\overline{\alpha}/F) \iff \mathfrak{A}' \Vdash \Phi_1(\overline{\alpha}/F) \text{ и } \mathfrak{A}' \Vdash \Phi_2(\overline{\alpha}/F) \iff$$

$$\iff I_1 \in F \text{ и } I_2 \in F \iff I_1 \cap I_2 \in F$$

Фильтруемые формулы и теорема Лося

4) $\Phi(\overline{x}) = \exists y \Psi(\overline{x}, y)$. Тогда имеем:

$$\mathfrak{A}' \Vdash \Phi(\overline{\alpha}/F) \iff \exists \beta \mid \mathfrak{A}' \Vdash \Psi(\overline{\alpha}/F, \beta/F) \iff$$

$$\iff \exists \beta \mid I_1 = \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \Vdash \Psi(\overline{\alpha}(i), \beta(i))\} \in F \iff$$

$$\iff I_2 = \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \Vdash \Phi(\overline{\alpha}(i))\} \in F$$

■

Компактность и аксиоматизируемость

Теорема (Гёделя-Мальцева о компактности)

Любое локально выполнимое множество предложений выполнимо.

Доказательство

Пусть $\Gamma \subseteq Sent_\sigma$ локально выполнимо.

Если Γ конечно, то доказывать нечего.

Пусть Γ бесконечно, положим:

$$I := \{i \mid i - \text{ конечное подмножество } \Gamma\}$$

$\forall i \in I$ определим $B_i := \{j \in I \mid i \subseteq j\}$ и докажем, что множество $F_0 := \{B_i \mid i \in I\}$ является центрированным.

$B_i \neq \emptyset$, ибо $i \in B_i$. Легко понять, что если $B_{i_1}, \ldots, B_{i_n} \in F_0$, то

$$B_{i_1} \cap \ldots \cap B_{i_n} = B_{i_1 \cup \ldots \cup i_n} \neq \emptyset$$

Значит, F_0 — центрированное множество и тогда существует ультрафильтр F на I, расширяющий F_0.

Тогда, если $i \in I$, то по условию существует σ-структура $\mathfrak{A}_i$, такая что

$$\mathfrak{A}_i \Vdash \Phi \quad (\forall \Phi \in i)$$

Возьмём фильтрованное произведение по нашему ультрафильтру всех таких систем и покажем, что это будет искомой моделью для всего Γ. Итак, пусть $\mathfrak{A} = \Pi^F_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ и $\Phi \in \Gamma$. По теореме Лося:

$$\mathfrak{A} \Vdash \Phi \iff I_\Phi = \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \Vdash \Phi\} \in F$$

Пусть $i_0 = \{\Phi\}$, тогда $B_{i_0} \in F$. Заметим, что $B_{i_0} \subseteq I_\Phi$, а значит $I_\Phi \in F$ и в итоге:

$$\forall \Phi \in \Gamma \;\; \mathfrak{A} \Vdash \Phi$$

То есть $\mathfrak{A}$ действительно является моделью Γ. ■

Компактность и аксиоматизируемость

Пусть σ — сигнатура и $\mathcal{K}_\sigma$ — класс всех σ-структур.

Тогда назовём подкласс $\mathcal{K}$ в $\mathcal{K}_\sigma$ аксиоматизируемым, если существует $\Gamma \subseteq Sent_\sigma$ такое что:

$$\mathfrak{A} \text{ лежит в } \mathcal{K} \iff \mathfrak{A} \Vdash \Gamma$$

Собственно, Γ называется множеством аксиом для класса $\mathcal{K}$.

Также назовём две структуры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ элементарно эквивалентными $(\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B})$, если

$$\forall \Phi \in Sent_\sigma \;\; \mathfrak{A} \Vdash \Phi \iff \mathfrak{B} \Vdash \Phi$$

Оказывается, существует сильная структурная связь между аксиоматизируемостью и ультрапроизведениями:

Теорема (критерий аксиоматизируемости класса)

Класс $\mathcal{K}$ — аксиоматизируем тогда и только тогда, когда он замкнут относительно элементарных эквивалентностей и ультрапроизведений.