Теорема Биркгофа о многообразиях

Владислав Макаров

18 декабря 2020 г.

Алгебраические системы

- Сигнатура σ, состоящая из только из функциональных символов, включая константы.
- Обычная пропозициональная логика в такую модель хорошо вписывается: есть сигнатура $\langle \vee^2, \wedge^2, \to^2 \neg^1 \rangle$.
- Более того, мы ещё эти связки по-разному интерпретируем в, скажем, классической и интуиционисткой логиках.
- Но всё-таки, это больше придумывали для того, чтобы как-то общо описать разные алгебраические конструкции.
- Например, в таких терминах группы задаются сигнатурой $\langle \cdot, ^{-1}, e \rangle$ с обычной местностью у каждого символа и какими-то аксиомами.
- Но обо всём по порядку.

Алгебраические системы: продолжение

- Алгебра $\mathfrak{A}$ сигнатуры σ — множество A (носитель) вместе с интерпретацией каждого символа сигнатуры как функции $A^{\text{местность}} \to A$. Как обычно, интерпретацию $f \in \sigma$ в $\mathfrak{A}$ будем обозначать как $f^{\mathfrak{A}}$.
- Тогда про все первопорядковые предложения в сигнатуре σ можно говорить, истинннны они или нет в алгебре $\mathfrak{A}$ (здесь разрешается использовать логические связки, кванторы и знак равенства).
- Логические связки и кванторы воспринимаются в терминах классической логики, а знак равенства интерпретируется как настоящее равенство элементов A.
- Также можно говорить, что утверждение истинно в классе $\mathcal{K}$ алгебр над σ (оно должно быть истинно в каждой алгебре класса).
- Пишем $\mathfrak{A} \models \varphi$, $\mathcal{K} \models \varphi$.
- Никаких правил вывода здесь не рассматриваем (в алгебраических структурах их нет), смотрим только на семантическое следование.
- Пока ничего необычного.

Аксиоматизация алгебраических систем

- Если у нас есть класс $\mathcal{K}$ алгебр какой-то сигнатуры, то хочется его аксиоматизировать, при этом утверждениями попроще.
- Лучше всего самыми простыми, которые только есть — тождествами. Например, класс всех групп можно описать такими аксиомами:
- $\forall a \forall b \forall c \colon (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- $\forall a \colon e \cdot a = a$
- $\forall a \colon a \cdot e = a$
- $\forall a \colon a \cdot a^{-1} = e$
- $\forall a \colon a^{-1} \cdot a = e$
- С использованием логических связок то же самое можно написать проще, но так видно, что мы используем только равенства вида "какие-то два терма в сигнатуре σ всегда принимают одинаковые значения", то есть тождества.
- Для краткости будем писать не $\mathcal{K} \models \forall a_1 \ldots \forall a_n \colon t_1(a_1, \ldots, a_n) = t_2(a_1, \ldots, a_n)$, а просто $\mathcal{K} \models t_1 = t_2$

Аксиоматизация с помощью тождеств

- Группы, кольца, поля и тому подобные вещи легко аксиоматизируются с помощью тождеств.
- Но бывает и иначе. Совсем глупый пример — класс всех конечномерных векторных пространств над $\mathbb{F}_2$ в сигнатуре $\langle +, 0 \rangle$. Конечно же, класс всех векторных пространств над $\mathbb{F}_2$ аксиоматизируется тождествами.
- Но с конечномерными так не получится. Действительно, если тождество верно в каких-то пространствах, то оно верно и в их прямой сумме. Ну а прямая сумма бесконечного количества конечномерных пространств вполне себе может быть бесконечномерной. Значит, не получилось у нас аксиоматизации именно конечномерных пространств.
- Это глупый пример, но он показывает, что если мы хотим аксиоматизировать класс $\mathcal{K}$ тождествами, то $\mathcal{K}$ должен быть замкнут относительно своего аналога прямой суммы векторных пространств.

Относительно чего мы хотим быть замкнуты?

- Прямых сумм/произведений — см. выше
- Взятия подструктур: если что-то верно на большем множестве, то оно верно и на меньшем.
- Взятия гомоморфных образов. Почему? Потому что взять гомоморфный образ — то же самое, что отфакторизовать по ядру гомоморфизма. Но все тождества, которые были истинны в исходной структуре, останутся верны и после факторизации (могут даже добавиться новые).

Чтобы формализовать это утверждения в терминах алгебр, нужно сперва определить понятия прямого произведения алгебр, подалгебр и гомоморфизма алгебр. Понятия не всегда сходятся (например, прямое произведение алгебр, соответствующих векторным пространствам — это то, что обычно называют прямой суммой векторных пространств), но цель данного слайда скорее в том, чтобы пояснить интуицию за происходящим.

Прямые произведения алгебр, подалгебры

Везде дальше я по умолчанию считаю, что сигнатуру мы не меняем.

Определение

Прямое произведение алгебр (можно перемножать любые наборы алгебр, включая наборы несчётной “длины”) — носители декартово перемножаем, а функциональные символы интерпретируем покоординатно.

Определение

Подалгебра данной алгебры — берём подмножество носителя, замкнутое относительно применения функциональных символов (понятие осмысленное, так как у алгебры зафиксирована интерпретация функциональных символов), интерпретации просто сужаем на это подмножество.

Гомоморфизмы алгеб и, их ядра

Определение

Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — две алгебры одной и той же сигнатуры σ. Отображение $\varphi\colon A \to B$ называется гомоморфизмом, если оно проносится через функциональные символы, то есть $\varphi(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n))$ для любого $f \in \sigma$ (здесь n — это местность f) и любых $a_1, \dots, a_n$ из A.

Мономорфизм/эпиморфизм/изоморфизм — гомоморфизм, инъективный/сюръективный/биективный как отображение $A \to B$.

Хочется определить понятия ядра, но не получается вменяемо его определить как подмножество A, так как нет никакого хорошего аналога единицы для групп, нуля для колец и т. п. Что делать? Определим ядро как подмножество $A \times A$!

Определение

Ядром (обозначается $\ker \varphi$) гомоморфизма $\varphi\colon A \to B$ называется множество $\{\,(a_1, a_2) \in A \times A \mid \varphi(a_1) = \varphi(a_2)\,\}$.

Конгруэнции.

А что вообще может быть ядром гомоморфизма алгебр? Скажем, у групп это нормальные подгруппы. Про алгебры легко понять, что любое ядро гомоморфизма обязано быть конгруэнцией:

Определение

Конгруэнция алгебры $\mathfrak{A}$ — это отношение эквивалентности на A, согласованное с функциональными символами, то есть $f^{\mathfrak{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $f^{\mathfrak{A}}(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ должны быть эквивалентны, если a_i и b_i эквивалентны для каждого i.

Это как раз связано с возможностью пронести гомоморфизм через f: если $\varphi(a_i) = \varphi(b_i)$, то $\varphi(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(\varphi(b_1), \ldots, \varphi(b_n)) = \varphi(f^{\mathfrak{A}}(b_1, \ldots, b_n))$.
Уже поняли, что любое ядро гомоморфизма — конгруэнция. Как покажет следующий слайд, верно и обратное.

Фактор-алгебра по конгруэнции.

Интутивно, конструкция фактор-алгебры обобщает конструкции фактор-групп, фактор-колец, и тому подобных вещей.

Определение

Если θ — конгруэнция алгебры $\mathfrak{A}$, то можно определить фактор-алгебру $\mathfrak{A}/\theta$ с носителем A/θ (то есть множеством классов эквивалентности A относительно θ). Функциональные символы в $\mathfrak{A}/\theta$ интерпретируются через классы:
$f^{\mathfrak{A}/\theta}(\mathrm{cls}(a_1), \ldots, \mathrm{cls}(a_n)) := \mathrm{cls}(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n))$, где $\mathrm{cls}\colon A \to A/\theta$ просто сопоставляет каждому элементу его класс эквивалентности относительно θ.

Это определение корректно. Действительно, конгруэнции по определению согласованы с интерпретацией функциональных символов. Более того, получается, что cls — это гомоморфизм из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}/\theta$ с ядром θ. В частности, конгруэнции и ядра гомоморфизмов — в точности одно и то же.

Теорема о гомоморфизме

Для алгебр верна теорема о гомоморфизме.

Теорема

Если $\varphi\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ *— гомоморфизм, то образ* φ *изоморфен* $\mathfrak{A}/(\ker\varphi)$.

Доказательство.

Действительно, зададим отображение $\varphi_{\mathrm{cls}}\colon A/(\ker\varphi) \to \varphi(A)$ как $\varphi_{\mathrm{cls}}(\mathrm{cls}(a)) = \varphi(a)$ (здесь $\mathrm{cls}(a)$ — класс эквивалентности a по конгруэнции $\ker\varphi$). По определению ядра оно корректно (так как если $\mathrm{cls}(a_1) = \mathrm{cls}(a_2)$, то $(a_1, a_2) \in \ker\varphi$, то есть $\varphi(a_1) = \varphi(a_2)$) и биективно (если $\varphi_{\mathrm{cls}}(\mathrm{cls}(a_1)) = \varphi_{\mathrm{cls}}(\mathrm{cls}(a_2))$, то $\varphi(a_1) = \varphi(a_2)$, то есть $(a_1, a_2) \in \ker\varphi$, то есть $\mathrm{cls}(a_1) = \mathrm{cls}(a_2)$).
Наконец, это отображение является гомоморфизмом, так как φ, f, cls можно свободно проносить друг через друга. Формулы немного длинные, так что я не хочу их выписывать. $\square$

Теорема Биркгофа: формулировка

Теперь у нас всё готово для того, чтобы сформулировать теорему Биркгофа.

Определение

Непустой класс $\mathcal{K}$ алгебр какой-то сигнатуры — многообразие, если он замкнут относительно прямых произведений, взятия подалгебр и гомоморфных образов.

Как мы уже поняли, последнее условие можно заменить на замкнутость относительно факторизации и взятия изоморфных образов.

Теорема Биркгофа

Класс $\mathcal{K}$ алгебр какой-то сигнатуры можно аксиоматизировать тождествами если и только если $\mathcal{K}$ — многообразие.

Ещё многообразия интересны тем, что в них есть универсальные алгебры. Но об этом на следующем слайде.

Универсальные алгебры

Пусть есть класс алгебр $\mathcal{K}$ над σ, $\mathfrak{U}$ — алгебра той же сигнатуры, а X — непустое подмножество U (носителя $\mathfrak{U}$).

Определение

Пусть $\mathfrak{U}$ порождается X. Пусть также для любой алгебры $\mathfrak{B} \in K$ и любого отображения $\beta\colon X \to \mathfrak{B}$, его можно продолжить до гомоморфизма $\varphi\colon \mathfrak{U} \to \mathfrak{B}$, что $\varphi(x) = \beta(x)$ для всех $x \in X$. Тогда $\mathfrak{U}$ — универсальная алгебра для $\mathcal{K}$ относительно X.

"$\mathfrak{U}$ порождается X" означает, что замыкание X относительно интерпретаций функциональных символов — всё U. Это техническое условие, которое гарантирует, что такой гомоморфизм φ единственен. Я им пользоваться не буду.

Универсальные алгебры всегда есть, но не всегда сами попадают в класс $\mathcal{K}$. Например, рассмотрим класс конечномерных векторных пространств над $\mathbb{Q}$.

Опять про конечномерные векторные пространства

- Пусть $\mathcal{K}$ — класс всех конечномерных векторных пространств над $\mathbb{F}_2$ (как алгебр сигнатуры $\langle +, 0, \cdot_q \rangle$, здесь для каждого $q \in \mathbb{Q}$ есть по функциональному символу $\cdot_q$, каждый такой символ интерпретируется как умножение вектора на константу q).
- Если X — конечное множество, то внутри самого $\mathcal{K}$ есть универсальная алгебра относительно X — подойдёт просто векторное пространство с базисом X. Действительно, в этом случае определение универсальной алгебры говорит, что нужно произвольное отображение базиса продолжить до линейного отображения всего пространства.
- С другой стороны, пусть X — счётно. Тогда в $\mathcal{K}$ нет универсальной относительно X алгебры. Действительно, пусть она есть и имеет размерность n. Возьмём в качестве $\mathfrak{B}$ какое-то $(n+1)$-мерное пространство и потребуем, чтобы какой-нибудь базис $\mathfrak{B}$ целиком попал в образ β. Тогда φ линейно сюръективно отображает n-мерное пространство в $(n+1)$-мерное. А это какой-то бред.

Алгебра термов

- Не во всех классов алгебр есть универсальная для каждого X.
- Но какая-то универсальная относительно X алгебра всегда найдётся, она просто не обязана сама лежать в $\mathcal{K}$.
- Например, подойдёт алгебра $Term_\sigma(X)$ всех термов сигнатуры σ над переменными X. Действительно, гомоморфизм φ из определения универсальной алгебры получается просто вычислением терма на заданных элементах $\mathfrak{B}$.
- Но алгебра термов универсальна для любого класса алгебр сигнатуры σ. Вряд ли она сама лежит в классе $\mathcal{K}$.
- Если класс $\mathcal{K}$ аксиоматизируется тождествами и внутри него есть все нужные универсальные алгебры, то эти алгебры тоже удовлетворяют этим тождествам.
- Но для алгебры термов вообще нет тождеств, кроме $t = t$.
- Решение простое — отфакторизуем алгебру термов по тождествам, которые всегда есть.

Множество всех тождеств $\mathcal{K}$ как конгруэнция

- Хотим понять, какие тождества для термов над X всегда истинны в $\mathcal{K}$, то есть истинны для любой алгебры $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ и для любого способа задать переменным из X значения из A.
- Каждое такое означивание можно воспринимать как гомоморфизм $Term_\sigma(X) \to \mathfrak{A}$. Пусть $\Theta_{\mathcal{K}}(X)$ — множество ядер всех таких означиваний.
- По определению ядро означивания — в точности пары термов, совпавшие при таком означивании. Поэтому если $\theta_{\mathcal{K}}(X)$ — пересечение всех ядер из $\Theta_{\mathcal{K}}(X)$, то $(t_1, t_2) \in \theta_{\mathcal{K}}(X)$ в том и только в том случае, когда $\mathcal{K} \models t_1 = t_2$, то есть $t_1 = t_2$ — тождество в $\mathcal{K}$.
- $\theta_{\mathcal{K}}(X)$ — конгруэнция. Действительно, из определения конгруэнции несложно следует, что пересечение конгруэнций — тоже конгруэнция, а каждый элемент $\Theta_{\mathcal{K}}(X)$ — конгруэнция как ядро гомоморфизма.

Факторизованная алгебра термов

- Рассмотрим алгебру $Term_{\mathcal{K}}(X) := Term_{\sigma}(X)/\theta_{\mathcal{K}}(X)$.
- Можно сказать, что она “учитывает индивидуальность” класса $\mathcal{K}$, поэтому у неё нижний индекс $\mathcal{K}$, а не σ.
- Она всё ещё универсальная для $\mathcal{K}$ относительно X, так как мы отфакторизовали только по тождествам класса $\mathcal{K}$.
- Оказывается, что $\mathcal{K}$ — подалгебра прямого произведения алгебр из $\mathcal{K}$! Это самая важная часть доказательства, поэтому я вынес её на отдельный слайд.
- Но если мы это докажем, то получится, что внутри многообразий есть все нужные универсальные для них алгебры.

$Term_{\mathcal{K}}(X)$ — подалгебра прямого произведения элементов $\mathcal{K}$

Действительно, каждое $\theta \in \Theta_{\mathcal{K}}(X)$ — ядро соответствующего гомоморфизма $\varphi_\theta\colon\ Term_\sigma(X) \to \mathfrak{A}_\theta \in \mathcal{K}$. Эти гомоморфизмы можно покоординатно объединить в один большой гомоморфизм $\varphi\colon\ Term_\sigma(X) \to \prod\limits_\theta \mathfrak{A}_\theta$.

Имеем $\ker\varphi = \theta_{\mathcal{K}}(X)$. Действительно, образы t_1 и t_2 равны тогда и только тогда, когда они равны покоординатно, то есть $\varphi_\theta(t_1) = \varphi_\theta(t_2)$ для каждого θ. То есть ядро φ — пересечения ядер φ_θ.

Рассмотрим образ φ. С одной стороны, это подалгебра $\prod\limits_\theta \mathfrak{A}_\theta$. С другой стороны, он изоморфен фактору $Term_\sigma(X)$ по ядру φ, то есть как раз $Term_\sigma(X)/\theta_{\mathcal{K}}(X) = Term_{\mathcal{K}}(X)$. Здесь мы воспользовались теоремой о гомоморфизме.

Задаётся тождествами $\Rightarrow$ многообразие

Для множества Γ равенств вида $t_1 = t_2$, где t_1 и t_2 — термы сигнатуры σ, определим $V(\Gamma) := \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \models \Gamma\}$.

Теорема

$V(\Gamma)$ — *многообразие.*

Доказательство.

Нужно проверить замкнутость $V(\Gamma)$ относительно гомоморфных образов, подалгебр и прямых произведений. Действительно, если есть сюръективный гомоморфизм $\varphi\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ и мы хотим проверить тождество на элементах $\mathfrak{B}$, то можно взять их прообразы в $\mathfrak{A}$ и проверить тождество на них (если $t_1 = t_2$, то $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$). С подалгебрами ещё проще: просто сужаем область проверки. Наконец, по определению прямого произведения, тождества для прямого произведения можно проверять покоординатно. $\square$

Многообразие $\Rightarrow$ задаётся тождествами

Теорема

Пусть $\mathcal{K}$ — многообразие над сигнатурой σ. Тогда есть такое множество тождеств Γ, что $K = V(\Gamma)$.

Доказательство.

Пусть Γ — множество всех тождеств $\mathcal{K}$, а $\mathcal{K}' = V(\Gamma)$. Тогда $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}'$ по определению. Раз в $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}'$ истинны одни и те же тождества, то, в частности, для любого бесконечного X множества $\theta_{\mathcal{K}}(X)$ и $\theta_{\mathcal{K}'}(X)$ равны. Действительно, $(t_1, t_2) \in \mathcal{K}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{K} \models t_1 = t_2$, аналогично с $\mathcal{K}'$. Раз так, то $Term_{\mathcal{K}'}(X) = Term_{\mathcal{K}}(X) \in \mathcal{K}$ как подалгебра произведения элементов многоообразия. Наконец, каждый элемент $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}'$ — гомоморфный образ $Term_{\mathcal{K}'}(X) \in \mathcal{K}$ для достаточно большого X (достаточно просто взять по переменной для каждого элемента $\mathfrak{A}$). Значит, все элементы $\mathcal{K}'$ лежат в $\mathcal{K}$, то есть $\mathcal{K} = \mathcal{K}' = V(\Gamma)$. $\square$

Теорема Биркгофа (снова)

Теорема Биркгофа

Класс $\mathcal{K}$ алгебр какой-то сигнатуры можно аксиоматизировать тождествами если и только если $\mathcal{K}$ — многообразие.

Собственно, мы уже доказали эту теорему в обе стороны. Для доказательства было очень важно, что $Term_{\mathcal{K}}(X) \in \mathcal{K}$, если $\mathcal{K}$ — многообразие. Если бы не этот факт, то доказательство бы в самый последний момент не сошлось.