Теорема Стоуна

Михаил Мрыхин

15 декабря 2020

Вспомним определения

Определение

Булева алгебра $\mathfrak{B} = (B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ *— это дистрибутивная решётка с дополнениями.*

Вспомним определения

Определение

Булева алгебра $\mathfrak{B} = (B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ *— это дистрибутивная решётка с дополнениями.*

Определение

Идеал булевой алгебры — подмножество, замкнутое относительно супремумов и поглощающее инфимумы; собственный, если не совпадает с $\varnothing$ *и* B*, и максимальный, если максимален по включению среди собственных.*

Вспомним определения

Определение

Булева алгебра $\mathfrak{B} = (B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ *— это дистрибутивная решётка с дополнениями.*

Определение

Идеал булевой алгебры — подмножество, замкнутое относительно супремумов и поглощающее инфимумы; собственный, если не совпадает с $\varnothing$ *и B, и максимальный, если максимален по включению среди собственных.*

Определение

Фильтр булевой алгебры — подмножество, замкнутое относительно инфимумов и поглощающее супремумы; собственный, если не совпадает с $\varnothing$ *и B, и ультрафильтр, если максимален по включению среди собственных.*

Вспомним определения

Определение

Булева алгебра $\mathfrak{B} = (B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ *— это дистрибутивная решётка с дополнениями.*

Определение

Идеал булевой алгебры — подмножество, замкнутое относительно супремумов и поглощающее инфимумы; собственный, если не совпадает с $\varnothing$ *и* B*, и максимальный, если максимален по включению среди собственных.*

Определение

Фильтр булевой алгебры — подмножество, замкнутое относительно инфимумов и поглощающее супремумы; собственный, если не совпадает с $\varnothing$ *и* B*, и ультрафильтр, если максимален по включению среди собственных.*

Утверждение

I *является (собственным/максимальным) идеалом тогда и только тогда, когда* $\neg I = \{\neg x \mid x \in I\}$ *является (собственным/ультра-) фильтром.*

О расширении до ультрафильтра

Утверждение

Любой собственный фильтр булевой алгебры можно расширить до ультрафильтра.

О расширении до ультрафильтра

Утверждение

Любой собственный фильтр булевой алгебры можно расширить до ультрафильтра.

Доказательство.

Рассмотрим объединение цепи вложенных собственных фильтров. Легко заметить, что это фильтр; каждый элемент появляется на конечном шаге, и на каждом конечном шаге фильтр замкнут.

О расширении до ультрафильтра

Утверждение

Любой собственный фильтр булевой алгебры можно расширить до ультрафильтра.

Доказательство.

Рассмотрим объединение цепи вложенных собственных фильтров. Легко заметить, что это фильтр; каждый элемент появляется на конечном шаге, и на каждом конечном шаге фильтр замкнут. Более того, он собственный; иначе можно рассмотреть произвольную пару элементов a и $\neg a$, каждый из которых обязан появиться на конечном шаге, и получить противоречие, так как на каждом конечном шаге фильтр был собственный (а значит, не содержал $0 = a \wedge \neg a$).

О расширении до ультрафильтра

Утверждение

Любой собственный фильтр булевой алгебры можно расширить до ультрафильтра.

Доказательство.

Рассмотрим объединение цепи вложенных собственных фильтров. Легко заметить, что это фильтр; каждый элемент появляется на конечном шаге, и на каждом конечном шаге фильтр замкнут. Более того, он собственный; иначе можно рассмотреть произвольную пару элементов a и $\neg a$, каждый из которых обязан появиться на конечном шаге, и получить противоречие, так как на каждом конечном шаге фильтр был собственный (а значит, не содержал $0 = a \wedge \neg a$). Осталось только применить лемму Цорна к множеству собственных фильтров, расширяющих данный, упорядоченному по включению. □

Характеризация булевых ультрафильтров

Лемма

Фильтр $F \subset B$ является ультрафильтром тогда и только тогда, когда для любого $a \in B$ либо $a \in F$, либо $\neg a \in F$.

Характеризация булевых ультрафильтров

Лемма

Фильтр $F \subset B$ является ультрафильтром тогда и только тогда, когда для любого $a \in B$ либо $a \in F$, либо $\neg a \in F$.

Доказательство.

($\Rightarrow$) Пусть ультрафильтр F не содержит a. Рассмотрим фильтр $\{a' \wedge b \mid a' \geqslant a, b \in F\}$. Очевидно, он содержит a (при $b = 1$) и все элементы F (при $a' = 1$), а значит, должен тривиально совпадать с B.

Характеризация булевых ультрафильтров

Лемма

Фильтр $F \subset B$ является ультрафильтром тогда и только тогда, когда для любого $a \in B$ либо $a \in F$, либо $\neg a \in F$.

Доказательство.

($\Rightarrow$) Пусть ультрафильтр F не содержит a. Рассмотрим фильтр $\{a' \wedge b \mid a' \geqslant a, b \in F\}$. Очевидно, он содержит a (при $b = 1$) и все элементы F (при $a' = 1$), а значит, должен тривиально совпадать с B. Тогда $\neg a = (a \vee x) \wedge b = (a \wedge b) \vee (x \wedge b)$; с другой стороны, $\neg a = \neg a \wedge \neg a = \neg a \wedge (a \vee x) \wedge b = \neg a \wedge (x \wedge b)$. Отсюда имеем $\neg a = x \wedge b$ и $a \wedge b \leqslant \neg a$. Применив $\vee \neg a$, получим из последнего $b \leqslant \neg a$; следовательно, $\neg a$ должно лежать в F по определению.

Характеризация булевых ультрафильтров

Лемма

Фильтр $F \subset B$ является ультрафильтром тогда и только тогда, когда для любого $a \in B$ либо $a \in F$, либо $\neg a \in F$.

Доказательство.

($\Rightarrow$) Пусть ультрафильтр F не содержит a. Рассмотрим фильтр $\{a' \wedge b \mid a' \geqslant a, b \in F\}$. Очевидно, он содержит a (при $b = 1$) и все элементы F (при $a' = 1$), а значит, должен тривиально совпадать с B. Тогда $\neg a = (a \vee x) \wedge b = (a \wedge b) \vee (x \wedge b)$; с другой стороны, $\neg a = \neg a \wedge \neg a = \neg a \wedge (a \vee x) \wedge b = \neg a \wedge (x \wedge b)$. Отсюда имеем $\neg a = x \wedge b$ и $a \wedge b \leqslant \neg a$. Применив $\vee \neg a$, получим из последнего $b \leqslant \neg a$; следовательно, $\neg a$ должно лежать в F по определению.
($\Leftarrow$) Рассмотрим произвольный больший фильтр $F_1 \supset F$. Тогда для $a \in F_1 \setminus F$ по условию имеем $\neg a \in F$, а следовательно, $0 = a \wedge \neg a \in F_1$, что возможно только при $F_1 = B$. $\square$

Разложение супремума в ультрафильтре

Лемма

Если U *— ультрафильтр, и* $x \vee y$ *лежит в* U*, то хотя бы один из* x *и* y *лежит в* U*.*

Разложение супремума в ультрафильтре

Лемма

Если U — ультрафильтр, и $x \vee y$ лежит в U, то хотя бы один из x и y лежит в U.

Доказательство.

Допустим, что ни x, ни y не лежат в U. Тогда то по лемме выше в U лежат $\neg x$ и $\neg y$, и по определению фильтра там же лежит $\neg x \wedge \neg y$. Однако $\neg x \wedge \neg y = \neg(x \vee y)$. Противоречие. $\square$

О множествах ультрафильтров

Обозначим за B^* множество ультрафильтров булевой алгебры $\mathfrak{B}$, а за $\mathcal{U}_a$ — подмножество всех ультрафильтров, содержащих элемент a.

Теорема

- $\mathcal{U}_a = \varnothing \Leftrightarrow a = 0$
- $\mathcal{U}_a = B^* \Leftrightarrow a = 1$
- $\mathcal{U}_{\neg a} = B^* \setminus \mathcal{U}_a$
- $\mathcal{U}_{a \wedge b} = \mathcal{U}_a \cap \mathcal{U}_b$
- $\mathcal{U}_{a \vee b} = \mathcal{U}_a \cup \mathcal{U}_b$

О множествах ультрафильтров

Обозначим за B^* множество ультрафильтров булевой алгебры $\mathfrak{B}$, а за $\mathcal{U}_a$ — подмножество всех ультрафильтров, содержащих элемент a.

Теорема

- $\mathcal{U}_a = \varnothing \Leftrightarrow a = 0$
- $\mathcal{U}_a = B^* \Leftrightarrow a = 1$
- $\mathcal{U}_{\neg a} = B^* \setminus \mathcal{U}_a$
- $\mathcal{U}_{a \wedge b} = \mathcal{U}_a \cap \mathcal{U}_b$
- $\mathcal{U}_{a \vee b} = \mathcal{U}_a \cup \mathcal{U}_b$

Доказательство.

- Если $a = 0$, очевидно по определению; если $a \neq 0$, расширим фильтр всех элементов, не меньших a, до ультрафильтра.

О множествах ультрафильтров

Обозначим за B^* множество ультрафильтров булевой алгебры $\mathfrak{B}$, а за $\mathcal{U}_a$ — подмножество всех ультрафильтров, содержащих элемент a.

Теорема

- $\mathcal{U}_a = \varnothing \Leftrightarrow a = 0$
- $\mathcal{U}_a = B^* \Leftrightarrow a = 1$
- $\mathcal{U}_{\neg a} = B^* \setminus \mathcal{U}_a$
- $\mathcal{U}_{a \wedge b} = \mathcal{U}_a \cap \mathcal{U}_b$
- $\mathcal{U}_{a \vee b} = \mathcal{U}_a \cup \mathcal{U}_b$

Доказательство.

- Если $a = 0$, очевидно по определению; если $a \neq 0$, расширим фильтр всех элементов, не меньших a, до ультрафильтра.
- Если $a = 1$, очевидно по определению; если $a \neq 1$, расширим фильтр всех элементов, не меньших $\neg a$, до ультрафильтра.

О множествах ультрафильтров

Обозначим за B^* множество ультрафильтров булевой алгебры $\mathfrak{B}$, а за $\mathcal{U}_a$ — подмножество всех ультрафильтров, содержащих элемент a.

Теорема

- $\mathcal{U}_a = \varnothing \Leftrightarrow a = 0$
- $\mathcal{U}_a = B^* \Leftrightarrow a = 1$
- $\mathcal{U}_{\neg a} = B^* \setminus \mathcal{U}_a$
- $\mathcal{U}_{a \wedge b} = \mathcal{U}_a \cap \mathcal{U}_b$
- $\mathcal{U}_{a \vee b} = \mathcal{U}_a \cup \mathcal{U}_b$

Доказательство.

- Если $a = 0$, очевидно по определению; если $a \neq 0$, расширим фильтр всех элементов, не меньших a, до ультрафильтра.
- Если $a = 1$, очевидно по определению; если $a \neq 1$, расширим фильтр всех элементов, не меньших $\neg a$, до ультрафильтра.
- Очевидно по лемме о характеризации ультрафильтров.

О множествах ультрафильтров

Доказательство.

- ($\subseteq$) Если $U \in \mathcal{U}_{a \wedge b}$, то $a \wedge b \in U$, и по определению фильтра $a = a \vee (a \wedge b) \in U, b = b \vee (a \wedge b) \in U$.

О множествах ультрафильтров

Доказательство.

- $(\subseteq)$ Если $U \in \mathcal{U}_{a \wedge b}$, то $a \wedge b \in U$, и по определению фильтра $a = a \vee (a \wedge b) \in U, b = b \vee (a \wedge b) \in U$.
  $(\supseteq)$ Если $U \in \mathcal{U}_a \cap \mathcal{U}_b$, то $a, b \in U$, и по определению фильтра $a \wedge b \in U$.

О множествах ультрафильтров

Доказательство.

- $(\subseteq)$ Если $U \in \mathcal{U}_{a\wedge b}$, то $a \wedge b \in U$, и по определению фильтра $a = a \vee (a \wedge b) \in U, b = b \vee (a \wedge b) \in U$.
  $(\supseteq)$ Если $U \in \mathcal{U}_a \cap \mathcal{U}_b$, то $a, b \in U$, и по определению фильтра $a \wedge b \in U$.
- $(\subseteq)$ Допустим, что $U \in \mathcal{U}_{a\vee b}$, но $a, b \notin U$. Тогда $\neg a, \neg b \in U$, то есть $\neg a \wedge \neg b \in U$ по определению; но $\neg a \wedge \neg b = \neg(a \vee b)$, и при этом $a \vee b$ тоже лежит в U. Противоречие.

О множествах ультрафильтров

Доказательство.

- ($\subseteq$) Если $U \in \mathcal{U}_{a \wedge b}$, то $a \wedge b \in U$, и по определению фильтра $a = a \vee (a \wedge b) \in U, b = b \vee (a \wedge b) \in U$.
  ($\supseteq$) Если $U \in \mathcal{U}_a \cap \mathcal{U}_b$, то $a, b \in U$, и по определению фильтра $a \wedge b \in U$.
- ($\subseteq$) Допустим, что $U \in \mathcal{U}_{a \vee b}$, но $a, b \notin U$. Тогда $\neg a, \neg b \in U$, то есть $\neg a \wedge \neg b \in U$ по определению; но $\neg a \wedge \neg b = \neg(a \vee b)$, и при этом $a \vee b$ тоже лежит в U. Противоречие.
  ($\supseteq$) Если $U \in \mathcal{U}_a \cup \mathcal{U}_b$, то $a \in U$ или $b \in U$, и по определению фильтра $a \vee b \in U$.

$\square$

Вспомним топологию

Определение

Топологическое пространство $\mathfrak{X} = (X, \Omega)$ *— это множество точек* X *с системой открытых подмножеств* $\Omega \in 2^X$*, замкнутой относительно любых объединений и конечных пересечений, а также включающей* X *и* $\varnothing$*. Дополнения открытых множеств называются замкнутыми.*

Вспомним топологию

Определение

Топологическое пространство $\mathfrak{X} = (X, \Omega)$ *— это множество точек* X *с системой открытых подмножеств* $\Omega \in 2^X$*, замкнутой относительно любых объединений и конечных пересечений, а также включающей* X *и* $\varnothing$*. Дополнения открытых множеств называются замкнутыми.*

Определение

Топологическое пространство компактно, если из любого покрытия его открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.

Вспомним топологию

Определение

Топологическое пространство $\mathfrak{X} = (X, \Omega)$ *— это множество точек* X *с системой открытых подмножеств* $\Omega \in 2^X$, *замкнутой относительно любых объединений и конечных пересечений, а также включающей* X *и* $\varnothing$.
Дополнения открытых множеств называются замкнутыми.

Определение

Топологическое пространство компактно, если из любого покрытия его открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.

Определение

Топологическое пространство хаусдорфово, если для любых двух различных точек существует дизъюнктная пара содержащих их открытых множеств.

Вспомним топологию

Определение

Топологическое пространство $\mathfrak{X} = (X, \Omega)$ *— это множество точек* X *с системой открытых подмножеств* $\Omega \in 2^X$*, замкнутой относительно любых объединений и конечных пересечений, а также включающей* X *и* $\varnothing$*. Дополнения открытых множеств называются замкнутыми.*

Определение

Топологическое пространство компактно, если из любого покрытия его открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.

Определение

Топологическое пространство хаусдорфово, если для любых двух различных точек существует дизъюнктная пара содержащих их открытых множеств.

Определение

Базис топологии — это такое множество открытых подмножеств, что любое открытое подмножество представляется в виде их объединения.

Топологическое пространство ультрафильтров

Обозначим за $\mathfrak{B}^*$ топологическое пространство на B^*, порождённое базисом $\mathcal{U}_a$ (то, что это действительно базис, напрямую следует из предыдущей теоремы).

Теорема

$\mathfrak{B}^*$ *компактно и хаусдорфово.*

Топологическое пространство ультрафильтров

Обозначим за $\mathfrak{B}^*$ топологическое пространство на B^*, порождённое базисом $\mathcal{U}_a$ (то, что это действительно базис, напрямую следует из предыдущей теоремы).

Теорема

$\mathfrak{B}^*$ компактно и хаусдорфово.

Доказательство.

Пусть $B^* = \bigcup_{a \in A} \mathcal{U}_a$. Рассмотрим идеал I, порождённый множеством A. Если $I \neq B$, расширим $\neg I$ до ультрафильтра U; тогда $\neg A \subseteq \neg I \subseteq U$. С другой стороны, по изначальному покрытию найдётся такое $a \in A$, что $U \subseteq \mathcal{U}_a$, то есть $a \in U$. Противоречие.

Топологическое пространство ультрафильтров

Обозначим за $\mathfrak{B}^*$ топологическое пространство на B^*, порождённое базисом $\mathcal{U}_a$ (то, что это действительно базис, напрямую следует из предыдущей теоремы).

Теорема

$\mathfrak{B}^*$ *компактно и хаусдорфово.*

Доказательство.

Пусть $B^* = \bigcup_{a \in A} \mathcal{U}_a$. Рассмотрим идеал I, порождённый множеством A. Если $I \neq B$, расширим $\neg I$ до ультрафильтра U; тогда $\neg A \subseteq \neg I \subseteq U$. С другой стороны, по изначальному покрытию найдётся такое $a \in A$, что $U \subseteq \mathcal{U}_a$, то есть $a \in U$. Противоречие.
Таким образом, $I = B$, и в частности, $1 = (a_1 \wedge x_1) \vee \ldots \vee (a_n \wedge x_n)$ (где n конечно!). Тогда по лемме о разложении супремума для каждого ультрафильтра U найдётся такое i, что $a_i \wedge x_i \in U$; это, в свою очередь, влечёт $a_i \in U$ и $U \in \mathcal{U}_{a_i}$. Значит, $\mathcal{U}_{a_i}$ и образуют конечное покрытие B^*.

Топологическое пространство ультрафильтров

Доказательство.

Осталось доказать хаусдорфовость. Рассмотрим произвольное $a \in U_1 \setminus U_2$. Тогда по лемме о характеризации булевых ультрафильтров $\neg a \in U_2 \setminus U_1$, а значит, $U_1 \in \mathcal{U}_a, U_2 \in \mathcal{U}_{\neg a}$. Наконец, $\mathcal{U}_a \cap \mathcal{U}_{\neg a} = \mathcal{U}_{a \wedge \neg a} = \mathcal{U}_0 = \varnothing$. $\square$

Обратно, пусть дано топологическое пространство $\mathfrak{X} = (X, \Omega)$. Обозначим за X^* множество всех открыто-замкнутых множеств в $\mathfrak{X}$. Тогда по аксиомам топологии $\mathfrak{X}^* = (X^*, \cup, \cap, \neg, \varnothing, X)$, где $\neg A = X \setminus A$, является булевой алгеброй.

Теорема Стоуна о двойственности

Теорема

Если $\mathfrak{B}$ *— булева алгебра, то* $\mathfrak{B} \simeq (\mathfrak{B}^*)^*$.

Теорема Стоуна о двойственности

Теорема

Если $\mathfrak{B}$ *— булева алгебра, то* $\mathfrak{B} \simeq (\mathfrak{B}^*)^*$.

Доказательство.

Рассмотрим отображение из $\mathfrak{B}$ в $(\mathfrak{B}^*)^*$, отправляющее a в $\mathcal{U}_a$. По теореме о множествах ультрафильтров это гомоморфизм булевых алгебр, так что остаётся только проверить биективность.

Теорема Стоуна о двойственности

Теорема

Если $\mathfrak{B}$ *— булева алгебра, то* $\mathfrak{B} \simeq (\mathfrak{B}^*)^*$.

Доказательство.

Рассмотрим отображение из $\mathfrak{B}$ в $(\mathfrak{B}^*)^*$, отправляющее a в $\mathcal{U}_a$. По теореме о множествах ультрафильтров это гомоморфизм булевых алгебр, так что остаётся только проверить биективность.
Пусть $a \neq b$. Тогда $0 \neq (a \wedge \neg b) \vee (b \wedge \neg a)$, и по той же теореме $\varnothing \neq \mathcal{U}_{(a\wedge\neg b)\vee(b\wedge\neg a)} = (\mathcal{U}_a \setminus \mathcal{U}_b) \cup (\mathcal{U}_b \setminus \mathcal{U}_a)$. Значит, $\mathcal{U}_a \neq \mathcal{U}_b$.
Инъективность есть.

Теорема Стоуна о двойственности

Теорема

Если $\mathfrak{B}$ *— булева алгебра, то* $\mathfrak{B} \simeq (\mathfrak{B}^*)^*$.

Доказательство.

Рассмотрим отображение из $\mathfrak{B}$ в $(\mathfrak{B}^*)^*$, отправляющее a в $\mathcal{U}_a$. По теореме о множествах ультрафильтров это гомоморфизм булевых алгебр, так что остаётся только проверить биективность.
Пусть $a \neq b$. Тогда $0 \neq (a \wedge \neg b) \vee (b \wedge \neg a)$, и по той же теореме $\varnothing \neq \mathcal{U}_{(a\wedge\neg b)\vee(b\wedge\neg a)} = (\mathcal{U}_a \setminus \mathcal{U}_b) \cup (\mathcal{U}_b \setminus \mathcal{U}_a)$. Значит, $\mathcal{U}_a \neq \mathcal{U}_b$.
Инъективность есть.
Теперь сюръективность: пусть $Y = \bigcup_{a\in A} \mathcal{U}_a$, и $B^* \setminus Y$ открыто. Тогда $B^* = (B^* \setminus Y) \cup \bigcup_{a\in A} \mathcal{U}_a$ — покрытие компактного пространства открытыми, из которого можно выбрать конечное подпокрытие $B^* = (B^* \setminus Y) \cup \mathcal{U}_{a_1} \cup \ldots \cup \mathcal{U}_{a_n}$. Следовательно, $Y = \mathcal{U}_{a_1} \cup \ldots \cup \mathcal{U}_{a_n} = \mathcal{U}_{a_1\vee\ldots\vee a_n}$. $\square$

Спасибо за внимание!