Связь пропозициональных неклассических логик с логиками первого и второго порядков

Милов Артём

СПБГУ МКН

18 декабря, 2020

Напоминание: логика первого и второго порядков

Язык логики второго порядка отличается от языка логики первого путём добавления предикатных и функциональных переменных (нам кстати понадобятся только предикатные).

Формулы также могут содехжать кванторы по предикатным и функциональным переменным. Например

$$\forall P(P(x, y) \to P(y, x))$$

Верность формул в модели определяется также, как и для первопорядковой логики.
Только означивание теперь определено не только на индивидуальных переменных переменных, а ещё и на предикатных и функциональных.

Стандартные трансляции: логики первого порядка

Наша первая цель — построить так называемые *стандартные трансляции* наименьшей нормальной модальной логики K во фрагменты логик первого и второго порядков.

Для этого рассмотрим следующую сигнатуру:

$$\sigma_m := \{R^2, P_1^1, P_2^1, \ldots ; ; \}$$

Соответствующий данной первопорядкый язык назовём $\mathscr{L}_m^1$.

Стандартные трансляции: логики первого порядка

Зафиксируем индивидную переменную x.

Определим отображение $ST_x : For_{\mathcal{L}^m} \to For_{\sigma_m}$ следующим образом:

- $ST_x(p_i) := P_i(x)$
- $ST_x(\neg\phi) := \neg ST_x(\phi)$
- $ST_x(\phi * \psi) := ST_x(\phi) * ST_x(\psi)$, для $* = \{\vee, \wedge, \to\}$
- $ST_x(\Box\phi) := \forall y(xRy \to ST_y(\phi))$, где $ST_y(\phi) = ST_x(\phi)(x/y)$

Нетрудно заметить, что $FV(ST_x(\phi)) = x$ для любой ϕ.

Стандартные трансляции: логики первого порядка

Пусть имеется шкала Крипке $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ и модель $\mu = \langle \mathcal{F}, \upsilon \rangle$.

Сопоставим этой модели первопорядковую σ_m-структуру $\mathfrak{M}$ с носителем W, где

$$R^{\mathfrak{M}} := R$$
$$P_i^{\mathfrak{M}} := \upsilon(p_i)$$

Обозначим такую структуру за $\mathfrak{M}^{\mu}$.

Отображение, переводящее μ в $\mathfrak{M}^{\mu}$ очевидно биективно.

Стандартные трансляции: логики первого порядка

Утверждение

Пусть $\mu = \langle W, R, \upsilon \rangle$ *— модель Крипке,* $\phi \in For_{\mathcal{L}^m}$*. Тогда*

1. *Для любого мира* w *и означивания* γ*, таких что* $\gamma(x) = w$*:*

$$\mu, w \vDash \phi \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{M}^{\mu} \vDash ST_x(\phi)[\gamma]$$

2. $$\mu \vDash \phi \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{M}^{\mu} \vDash \forall x ST_x(\phi)$$

Стандартные трансляции: логики первого порядка

Доказательство.

1. Доказывается индукцией по сложности ϕ.

   Если $\phi = p_i$, то по определению $\mathfrak{M}^\mu$ (так как $\gamma(x) = w$):

$$\mu, w \vDash p_i \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{M}^\mu \vDash P_i(x)[\gamma]$$

   Шаг индукции в случае $\phi = \psi * \chi$ легко проверяется.

   Осталось рассмотреть случай $\phi = \Box\psi$:

. . .

Стандартные трансляции: логики первого порядка

Доказательство (продолжение).

$$\mu, w \vDash \Box\psi \quad \Leftrightarrow \quad \forall u(wRu \to \mu, u \vDash \psi)$$

$$\Leftrightarrow \forall u(wR^{\mathfrak{M}}u \to \mathfrak{M}^{\mu} \vDash ST_x(\psi)[\tilde{\gamma}])$$

где $\tilde{\gamma}$ — произвольное означивание, такое, что $\tilde{\gamma}(x) = u$

$$\Leftrightarrow \mathfrak{M}^{\mu} \vDash \forall y(xRy \to ST_y(\psi))[\gamma] \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{M}^{\mu} \vDash ST_x(\Box\psi)[\gamma]$$

Пункт 1 доказан. ...

Стандартные трансляции: логики первого порядка

Доказательство (продолжение).

2.
$$\mu, w \vDash \phi$$

для любого мира w в том и только в том случае, если для любого мира w и любой оценки $\gamma : \gamma(x) = w$

$$\mathfrak{M}^{\mu} \vDash \forall x ST_x(\phi)[\gamma]$$

$\square$

Стандартные трансляции: логики первого порядка

Теорема

Стандартная трансляция ST_x точно вкладывает логику $\mathbf{K}$ *в логику первого порядка языка* $\mathscr{L}^1_m$.

Доказательство.

Пусть $\phi \in \mathbf{K}$. Рассмотрим произвольную σ_m-структуру $\mathfrak{M}$.

Найдётся $\mu = \langle W, R^{\mathfrak{M}}, \upsilon \rangle$: $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^{\mu}$. Тогда

$$\mu, w \vDash \phi \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{M}^{\mu} \vDash ST_x(\phi)[\gamma]$$

Но $\mu, w \vDash \phi$ для любой модели Крипке μ и любого мира w, так как $\phi \in \mathbf{K}$. Значит

$$\mathfrak{M} \vDash ST_x(\phi)$$

...

Стандартные трансляции: логики первого порядка

Доказательство (продолжение).

Пусть ϕ — общезначим. То есть для любой модели Крипке μ:

$$\mathfrak{M}^{\mu} \vDash ST_x(\phi)$$

Тогда для любого μ

$$\mathfrak{M}^{\mu} \vDash \forall x ST_x(\phi)$$

А значит $\mu \vDash \phi$ для любой модели Крипке μ. То есть $\phi \in \mathbf{K}$.

Инъективность ST_x очевидна по построению. $\square$

Стандартные трансляции: логики второго порядка

Рассмотрим теперь логику второго порядка сигнатуры $\langle R^2 \rangle$ и с множеством предикатных переменных $P_1, P_2, P_3, \ldots$

Обозначим её $\mathscr{L}^2_m$.

Теорема, которую мы доказали, нетрудно обобщается на случай логики второго порядка.

Только для этого ещё надо определить стандартные трансляции в логику второго порядка.

Стандартные трансляции: логики второго порядка

Зафиксируем индивидную переменную x.

Определим отображение $ST^2_x : For_{\mathcal{L}^m} \to \mathscr{L}^2_m$ следующим образом:

- $ST^2_x(p_i) := P_i(x)$
- $ST^2_x(\neg\phi) := \neg ST^2_x(\phi)$
- $ST^2_x(\phi * \psi) := ST^2_x(\phi) * ST^2_x(\psi)$, для $* = \{\vee, \wedge, \to\}$
- $ST^2_x(\Box\phi) := \forall y(xRy \to ST^2_y(\phi))$, где $ST^2_y(\phi) = ST^2_x(\phi)(x/y)$

Стоит обратить внимание, что здесь P_i — предикатные переменные, а не символы (как это было в случае ST_x).

Стандартные трансляции: логики второго порядка

Также отметим, что класс шкал Крипке совпадает с классом моделей сигнатуры $\langle R \rangle$, а следовательно и с классом моделей над языком $\mathscr{L}^2_m$.

Сформулируем второпорядковые версии предыдущего утверждения и теоремы.

Стандартные трансляции: логики второго порядка

Утверждение

Пусть $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ *— шкала Крипке,* $\mu = \langle \mathcal{F}, \upsilon \rangle$ *— модель,* $\phi = \phi(p_1, p_2, \ldots, p_n) \in For_{\mathcal{L}^m}$*. Тогда*

1. *Для любого мира* w *и означивания* γ*, такого что* $\gamma(x) = w$ *и* $\gamma(P_i) = \upsilon(p_i)$*:*

$$\mu, w \vDash \phi \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{F} \vDash ST_x^2(\phi)[\gamma]$$

2. $$\mathcal{F} \vDash \phi \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{F} \vDash \forall P_1 \ldots \forall P_n \forall x ST_x^2(\phi)$$

Стандартные трансляции: логики второго порядка

Теорема

Стандартная трансляция ST_x^2 точно вкладывает логику $\boldsymbol{K}$ в логику первого второго языка $\mathscr{L}_m^2$.

Доказательства обоих этих фактов аналогичны доказательствам их первопорядковых версий. Мы не будем тратить на них время и силы.

Теперь займёмся вопросом о том, какие формулы языка первого порядка логически эквивалентны стандартным трансляциям модальных формул.

Бисимуляции

Пусть $\mu = \langle W, R, \upsilon \rangle$ и $\mu' = \langle W', R', \upsilon' \rangle$ — модели Крипке.

Отношение $Z \subseteq W \times W'$ называют бисимуляцией (биподобием) между μ и μ', если Z непусто, а также для всякого мира $w \in W$ и всякого мира $w' \in W'$:

1. $wZw' \Rightarrow \forall p \in Prop(w \in \upsilon(p) \Leftrightarrow w' \in \upsilon'(p))$
2. wZw' и $wRu \Rightarrow \exists u'(uZu'$ и $w'R'u')$
3. wZw' и $w'R'u' \Rightarrow \exists u(uZu'$ и $wRu)$

Бисимуляции

Пусть имеются σ_m-структуры $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$.

Тогда им соответствуют модели Крипке $\mu^{\mathfrak{M}}$ и $\mu^{\mathfrak{N}}$. Мы определяли их ранее.

Отношение $Z \subseteq |\mathfrak{M}| \times |\mathfrak{N}|$ называется бисимуляцией (биподобием) между $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, если Z — бисимуляция между $\mu^{\mathfrak{M}}$ и $\mu^{\mathfrak{N}}$.

Рассмотрим теперь несколько примеров бисимуляций, чтобы лучше представлять, что это такое.

Бисимуляции

Пример 1

Пусть $\mu = \langle W, R, \upsilon \rangle$ и $\mu' = \langle W', R', \upsilon' \rangle$ — модели Крипке, а f — p-морфизм из μ в μ'.

Тогда график функции f — бисимуляция между моделями μ и μ'.

Бисимуляции

Пример 2

Пусть $\mu' = \langle W', R', v' \rangle$ — модель Крипке, а μ порождённая подмодель μ.

Тогда $id_W : W \to W'$ —также бисимуляция между моделями μ и μ'.

Бисимуляции

Пример 3

Рассмотрим модели Крипке μ и μ':

$$\mu := \langle \{1,2,3,4,5\}, \{(1,2),(2,3),(3,4),(3,5)\}, \upsilon \rangle$$

$$\upsilon(p) := \{1,3\} \qquad \upsilon(q) := \{2,4,5\}$$

$$\mu' := \langle \{a,b,c,d,e\}, \{(a,b),(a,c),(b,d),(c,d),(d,e)\}, \upsilon' \rangle$$

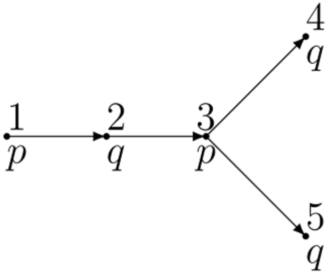
$$\upsilon'(p) := \{a,d\} \qquad \upsilon'(q) := \{b,c,e\}$$

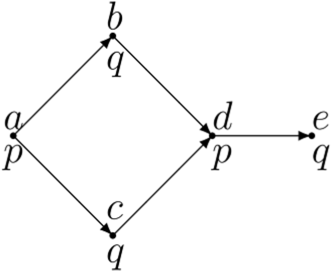
Бисимуляции

Непосредственно проверяется, что соотношение

$$Z := \{(1, a), (2, b), (2, c), (3, d), (4, e), (5, e)\}$$

оказывается бисимуляцией между μ и μ'.





Бисимуляции

Теорема

Пусть $\mu = \langle W, R, \upsilon \rangle$ *и* $\mu' = \langle W', R', \upsilon' \rangle$ *— модели Крипке, а* Z *— бисимуляция между* μ *и* μ'.

Тогда для любых миров $w \in W$ *и* $w' \in W'$, *и любой* $\phi \in For_{\mathcal{L}^m}$:

$$wZw' \to (\mu, w \vDash \phi \Leftrightarrow \mu', w' \vDash \phi)$$

Бисимуляции

Доказательство.

Индукцией по сложности ϕ.

Если $\phi = p$ и wZw', то

$$\mu, w \vDash p \quad \Leftrightarrow \quad w \in \upsilon(p) \quad \Leftrightarrow \quad w' \in \upsilon'(p) \quad \Leftrightarrow \quad \mu', w' \vDash p$$

Переход для $\phi = \psi * \chi$ очевиден.

Осталось рассмотреть случай $\phi = \Box\psi$. . . .

Бисимуляции

Доказательство (продолжение).

Знаем, что wZw'.

$$\mu, w \vDash \Box\psi \quad \Leftrightarrow \quad \forall u(wRu \Rightarrow \mu, u \vDash \psi) \quad \Leftrightarrow$$

$$\forall u'(w'R'u' \Rightarrow \mu', u' \vDash \psi) \quad \Leftrightarrow \quad \mu', w' \vDash \Box\psi$$

$\square$

Бисимуляции

Будем говорить, что σ_m-формула $\alpha(x)$ инвариантна относительно бисимуляций, если для любых σ_m-структур $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ и бисимуляции Z между ними:

$$\forall w \in |\mathfrak{M}| \forall u \in |\mathfrak{N}| (wZu \Rightarrow (\mathfrak{M} \models \alpha(x) \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \alpha(x)))$$

Бисимуляции

Следующая теорема, принадлежащая ван Бентему (J. van Benthem), приводится без доказательства.

Теорема

Первопорядковая формула $\alpha(x)$ сигнатуры σ_m инвариантна относительно бисимуляций, если и только если она логически эквивалентна стандартной трансляции некоторой модальной формулы.

Охраняемый фрагмент логики первого порядка

Рассмотрим произвольную предикатную сигнатуру σ. Охраняемым фрагментом языка первого порядка сигнатуры σ назовём наименьшее множество σ-формул GF_σ:

1. Все σ-атомы лежат в GF_σ
2. $$\phi, \psi \in GF_\sigma \Rightarrow \phi * \psi \in GF_\sigma$$

   где $* \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$

Охраняемый фрагмент логики первого порядка

3. Для ψ — σ-атома, $\phi \in GF_\sigma$ и $\overline{x}$ — набора индивидных переменных. Если

$$\overline{x} \subseteq FV(\psi) \subseteq FV(\phi)$$

то

$$\exists \overline{x}(\psi \wedge \phi) \in GF_\sigma \qquad \forall \overline{x}(\psi \wedge \phi) \in GF_\sigma$$

Охраняемый фрагмент логики первого порядка

К примеру формулы:

$$x = y \vee P(x, y, z)$$

$$\exists x \exists y (P(x, y, z) \wedge P(x, y, z))$$

$$\exists x \exists y (P(x, y, z) \wedge \forall u (R(u, x, y) \rightarrow S(u, x, y)))$$

Лежат в GF_σ. А вот следующие формулы не лежат:

$$\forall x \forall y \forall z (P(x, y, z) \wedge x = y)$$

$$\forall x \forall y \forall z (R(x, y) \wedge R(y, z) \Rightarrow R(x, z))$$

$$\forall x \forall y \forall z (R(x, y) \wedge R(x, z) \Rightarrow y = z)$$

Охраняемый фрагмент логики первого порядка

Пусть $\mathfrak{M}$ — σ-структура. $X \subseteq |\mathfrak{M}|$ называется охраняемым, если

X — одноэлементно

или

Найдутся $R \in \sigma$ и $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R^{\mathfrak{M}}$ такие, что $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

Охраняемый фрагмент логики первого порядка

Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — σ-структуры. Непустое множество Z конечных частичных изоморфизмов между $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ называется охраняемой бисимуляцией, если для любого $f \in Z$:

- Для каждого охраняемого подмножества $X \subseteq |\mathfrak{M}|$ найдётся $g \in Z$, такой что

$$dom(g) = X \qquad g\big|_{dom(f)\cap X} = f\big|_{dom(f)\cap X}$$

- Lля каждого охраняемого подмножества $X' \subseteq |\mathfrak{N}|$ найдётся $g \in Z$, такой что

$$range(g) = X' \qquad g^{-1}\big|_{range(f)\cap X'} = f^{-1}\big|_{range(f)\cap X'}$$

Охраняемый фрагмент логики первого порядка

Будем говорить, что σ_m-формула ϕ инвариантна относительно охраняемых бисимуляций, если для любых σ_m-структур $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ и охраняемой бисимуляции Z между ними:

$$\forall w \in |\mathfrak{M}| \forall u \in |\mathfrak{N}| (\mathfrak{M} \vDash \phi(u) \Leftrightarrow \mathfrak{N} \vDash \alpha(x))$$

Устойчивость формул относительно охраняемых бисимуляций определяется естественным образом.

Охраняемый фрагмент логики первого порядка

Приведём без доказательств ещё две теоремы.

Теорема (H. Andreka, J. van Benthem, I. Nemeti)

Формула ϕ сигнатуры σ логически эквивалентна некой формуле из GF_σ, если и только если ϕ устойчива относительно охраняемых бисимуляций.

Теорема (E. Gradel, 1999)

Проблема выполнимости для формул из GF_σ разрешима (для всякой предикатной сигнатуры σ).

Спасибо за внимание!