1 Булевы операции

1.1. «Основные равенства, связанные с пересечением, объединением и разностью».

2 Эквивалентности и частичные порядки

2.1. i. Если Y — разбиение X, то

$$\mathscr{E}_Y \;:=\; \{(u,v) \in X^2 \mid \exists y\,(y \in Y \wedge u \in y \wedge v \in y)\}$$

— эквивалентность на X, причём $X_{/\mathscr{E}_Y}$ равно Y.

ii. Если $\approx$ — эквивалентность на X, то $X_{/\approx}$ — разбиение X, причём $\mathscr{E}_{X_{/\approx}}$ равно $\approx$.

2.2. Пусть R — предпорядок на X. Тогда

$$\mathscr{S}_R \;:=\; \{(u,v) \in X^2 \mid uRv \wedge vRu\}$$

— эквивалентность на X. Кроме того,

$$R^\sharp \;:=\; \Big\{\Big([u]_{\mathscr{S}_R}, [v]_{\mathscr{S}_R}\Big) \mid u \in X \wedge v \in X \wedge uRv\Big\},$$

— частичный порядок на $X_{/\mathscr{S}_R}$.

2.3. i. Если R — строгий частичный порядок на X, то $R \cup \mathrm{id}_X$ — частичный порядок на X;

ii. Если R — частичный порядок на X, то $R \setminus \mathrm{id}_X$ — строгий частичный порядок на X.

3 Отношения и функции

3.1. Пусть R — множество упорядоченных пар, т.е.

$$\forall z\,(z \in R \to \exists x\,\exists y\, z = (x,y)).$$

Тогда найдутся X и Y такие, что $R \subseteq X \times Y$.

3.4. Если $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$, то $f \circ g : X \to Z$, причём $(f \circ g)(x) = g(f(x))$ для всех $x \in X$.

3.5. Пусть $f : X \to Y$. Имеют место следующие эквивалентности:

i. f инъективна тогда и только тогда, когда на f можно сокращать справа;

ii. f сюрьективна тогда и только тогда, когда на f можно сокращать слева.

3.6 (в ZFC). Пусть $f : X \to Y$. Имеют место следующие эквивалентности:

i. f инъективна тогда и только тогда, когда существует правая обратная к f;

ii. f сюрьективна тогда и только тогда, когда существует левая обратная к f.

Кроме того, если правая и левая обратные к f обе существуют, то они должны совпадать.

3.7. «Альтернативная формулировка аксиомы выбора» (C'). [Предполагая наличие всех остальных аксиом, покажите, что C и C' выводятся друг из друга.]

4 Натуральные числа и индукция

4.1. Для любого $n \in \mathbb{N}$ верно $n \subseteq n+1 \wedge \neg \exists x\, n \subsetneq x \subsetneq n+1$.

4.2. Для любых $m, n \in \mathbb{N}$,
$$m < n \quad \Longleftrightarrow \quad m \subsetneq n.$$

4.3. Для всех $n, m \in \mathbb{N}$ верно следующее:

i. $n \neq 0 \leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}\, n = k+1$;

ii. $n+1 = m+1 \leftrightarrow n = m$.

4.4 (принцип Дирихле). i. Для любого $n \in \mathbb{N}$ не существует инъекции из $n+1$ в n.

ii. Для любых $n, m \in \mathbb{N}$, если $m < n$, то не существует инъекции из n в m.

iii. Для любых $n, m \in \mathbb{N}$, если $n \neq m$, то не существует биекции между n и m.

4.5. Каждое натуральное число Т-конечно.

4.6. Множество всех натуральных чисел Т-бесконечно.

4.7. Множество конечно тогда и только тогда, когда оно Т-конечно.

5 Возвратная индукция и рекурсия

5.3. Если непустое множество натуральных чисел ограничено, то оно содержит наиб. элемент.

5.6. Для всех $k, m, n \in \mathbb{N}$ верно следующее:

i. $(k+m)+n = k+(m+n)$;

ii. $m+n = n+m$.

6 Равномощность

6.1. Для любых X, Y и Z верно следующее:

i. $|X \times Y| = |Y \times X|$;

ii. $|(X \times Y) \times Z| = |X \times (Y \times Z)|$;

iii. если $|X| = |Y|$, то $|X \times Z| = |Y \times Z|$.

6.2. Для любых X, Y и Z верно $\left|Z^{X \times Y}\right| = \left|\left(Z^Y\right)^X\right|$.

6.3. Для любых X, Y и Z верно следующее:

i. если $X \subseteq Y$, то $|X| \leqslant |Y|$;

ii. если $|X| \leqslant |Y|$, то $|X \times Z| \leqslant |Y \times Z|$;

iii. если $Y \neq \varnothing$, то $|X| \leqslant |X \times Y|$.

6.4. Для любых X, Y и Z верно следующее:

i. если $|X| \leqslant |Y|$, то $\left|X^Z\right| \leqslant \left|Y^Z\right|$;

ii. если $|X| \leqslant |Y|$, то $\left|Z^X\right| \leqslant \left|Z^Y\right|$;

iii. если $Y \neq \varnothing$, то $|X| \leqslant \left|X^Y\right|$.

6.5. Пусть $|X| \leqslant |Y|$ и $X \neq \varnothing$. Тогда существует сюрьекция из Y на X.

6.6 (в ZFC)**.** Пусть существует сюрьекция из Y на X. Тогда $|X| \leqslant |Y|$.

7 Счётные множества

7.2. Если множество конечно, то оно D-конечно.

7.3 (в ZFC)**.** Если множество бесконечно, то оно D-бесконечно.

7.4. Пусть $f : X \to \mathbb{R}$. Предположим также, что

$$\left\{\sum\nolimits_{s \in S} f(s) \mid S \subseteq X \text{ и } S \text{ конечно}\right\}$$

ограничено, т.е. существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что для любого конечного $S \subseteq X$,

$$\left|\sum\nolimits_{s \in S} f(s)\right| \leqslant N.$$

Тогда $\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ не более чем счётно.

8 Континуальные множества

8.1. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ и т.д. континуальны.

8.2. $\mathbb{R}^*$ континуально.

8.3. Множество всех трансцендентных чисел континуально.

8.4 (в ZFC)**.** Пусть $X \cup Y = \mathbb{R}$. Тогда хотя бы одно из X и Y континуально.

9 Упорядоченные множества

9.1. Пусть $\langle A, \leqslant\rangle$ — л.у.м.

i. Если S — начальный сегмент $\langle A, \leqslant\rangle$, а T — начальный сегмент $\langle S, \leqslant_S\rangle$, то T — начальный сегмент $\langle A, \leqslant\rangle$.

ii. Если $S \subseteq A$, а T — начальный сегмент $\langle A, \leqslant\rangle$, то $S \cap T$ — начальный сегмент $\langle S, \leqslant_S\rangle$.

[Здесь $\leqslant_S$ обозначает $\leqslant \cap\, S \times S$.]

9.2. Пусть $\mathfrak{A}$ — л.у.м.

i. Если S и T — начальные сегменты $\mathfrak{A}$, то $S \subseteq T$ или $T \subseteq S$.

ii. Если $\mathscr{S}$ — некоторое множество начальных сегментов $\mathfrak{A}$, то $\bigcup \mathscr{S}$ и $\bigcap \mathscr{S}$ окажутся начальными сегментами $\mathfrak{A}$.

9.3. Для всякого ч.у.м. $\langle A, \leqslant \rangle$ следующие условия эквивалентны:

i. $\leqslant$ — полный порядок на A;

ii. в каждом непустом подмножестве A есть наименьший элемент.

9.4 (в ZFC). Ч.у.м. $\langle A, \leqslant \rangle$ фундировано тогда и только тогда, когда не существует инъективной функции f из $\mathbb{N}$ в A такой, что $f(n+1) < f(n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

9.5. Гомоморфизм f из ч.у.м. $\mathfrak{A}$ в ч.у.м. $\mathfrak{B}$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда существует гомоморфизм g из $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{A}$ такой, что $f \circ g = \mathrm{id}_A$ и $g \circ f = \mathrm{id}_B$.

9.9. «Характеризация $\mathbb{N}$ как ч.у.м. с точностью до изоморфизма».

9.10. «Характеризация $\mathbb{Q}$ как ч.у.м. с точностью до изоморфизма».

9.11. С точностью до изоморфизма существует ровно четыре плотных л.у.м. со счётными носителями.

9.12. Постройте два плотных л.у.м. без концов с континуальными носителями, которые не изоморфны.

10 Ординалы и кардиналы

10.1. Докажите, что сложение и умножение на Ord ассоциативны.

10.2. Докажите, что ни сложение, ни умножение на Ord не коммутативно.

10.4. Докажите, что сложение и умножение на Card ассоциативны и коммутативны.

11 Лемма Цорна [Здесь всё в ZFC!]

11.1. У всякого векторного пространства есть базис.

11.2. Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant \rangle$ — ч.у.м. Тогда сущ. линейный порядок $\preccurlyeq$ на A такой, что $\leqslant \subseteq \preccurlyeq$.

11.3 (принцип максимума Хаусдорфа). Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant \rangle$ — ч.у.м. Тогда для каждой цепи S в $\mathfrak{A}$ найдётся максимальная цепь S' в $\mathfrak{A}$ такая, что $S \subseteq S'$.