Вопросы к экзамену по основам теории множеств

**1.** Наивная схема аксиом выделения. Парадоксы Рассела и Берри. Язык теории множеств и условия на множества. Система аксиом Цермело–Франкеля (без аксиомы выбора):

- аксиома экстенсиональности;
- аксиома пустого множества;
- аксиома пары [включая определение упорядоченных пар и доказательство их основного свойства];
- схема аксиом выделения [включая определение пересечения и разности двух множеств, а также пересечения произвольного непустого множества множеств];
- аксиома объединения [включая определение объединения двух множеств];
- аксиома степени [включая определение декартового произведения двух множеств];
- аксиома бесконечности;
- схема аксиом подстановки [включая вывод схемы аксиом выделения из неё];
- аксиома регулярности.

Основные равенства, связанные с пересечением, объединением и разностью [см. 1.1 в списке упражнений; по части доказательства можно ограничиться законами де Моргана].

**2.** Отношения и функции [включая сопутствующую терминологию и обозначения]. Упр. 3.1, 3.4–3.6. Аксиома выбора. Альтернативная формулировка аксиомы выбора [см. 3.7].

**3.** Эквивалентности, предпорядки и частичные порядки. Упр. 2.1–2.3.

**4.** Наименьшее по включению индуктивное множество $\mathbb{N}$. Функция последователя $\mathsf{s}$ и порядок $<$ на $\mathbb{N}$. Принцип индукции для $\mathbb{N}$. Утверждение о том, что элементы натуральных чисел суть натуральные числа. Утверждение о том, что $<$ — строгий линейный порядок на $\mathbb{N}$.

**5.** Упр. 4.1–4.4. Принцип возвратной индукции для $\mathbb{N}$ (с доказательством при помощи принципа индукции). Принцип минимального элемента для $\mathbb{N}$ (с доказательством при помощи принципа возвратной индукции). Упр. 5.3.

**6.** Теорема о рекурсии для $\mathbb{N}$ и её «частично-определённая» версия.

**7.** Параметризованная теорема о рекурсии для $\mathbb{N}$. Определение арифметических операций на $\mathbb{N}$. Упр. 5.6.

**8.** Теорема о возвратной рекурсии для $\mathbb{N}$ и её «частично-определённая» версия.

**9.** Теорема о возвратной «классовой рекурсии» для $\mathbb{N}$.

**10.** «$X$ равномощно $Y$» и «$X$ по мощности меньше или равно $Y$», а также их простейшие свойства. Теорема Кантора–Шрёдера–Бернштейна.

**11.** Упр. 6.1–6.6. Обобщённая теорема Кантора.

**12.** Конечные множества и их простейшие свойства [включая утверждение о мощностях $X \cup Y$, $X \times Y$ и $X^Y$, где $X$ и $Y$ конечны]. Конечность по Тарскому. Упр. 4.5–4.7.

**13.** Счётные и «не более чем счётные» множества. Утверждения о том, что:

- если множество бесконечно, то у него есть счётное подмножество; %в ZFC
- $|X| \leqslant \aleph_0$ тогда и только тогда, когда $X$ конечно или счётно; %в ZF
- $|X| \not> \aleph_0$ тогда и только тогда, когда $|X| \leqslant \aleph_0$. %в ZFC

Простейшие свойства не более чем счётных множеств [вплоть до утверждений об объединении и декартовом произведении двух такого рода множеств]. Утверждение о добавлении не более чем счётных множеств к бесконечным и следствие из него. Конечность по Дедекинду. Упр. 7.2–7.3.

**14.** Утверждения о счётности множества всех слов в не более чем счётном непустом алфавите и о счётности множество всех конечных подмножеств счётного множества. Утверждение о счётности объединения не более чем счётного семейства не более чем счётных множеств. Упр. 7.4.

**15.** Ч.у.м. и л.у.м. Максимальные и минимальные, наибольшие и наименьшие эл-ты. Верхние и нижние грани. Супремумы и инфимумы. Сопутствующие замечания. Гомоморфизмы, вложения и изоморфизмы между ч.у.м. Упр. 9.5. Базовые преобразования над ч.у.м. Упр. 9.1–9.2.

**16.** Принцип минимального элемента (фундированность) и принцип трансфинитной индукции. Теорема об их эквивалентности. В.у.м. Упр. 9.3–9.4. Утверждения о начальных сегментах в.у.м. Утверждения о вложениях и изоморфизмах между в.у.м. Теорема о сравнении в.у.м.

**17.** Характеризация $\mathbb{N}$ как ч.у.м. с точностью до изоморфизма [см. 9.9]. Характеризация $\mathbb{Q}$ как ч.у.м. с точностью до изоморфизма [см. 9.10]. Упр. 9.11 и 9.12.

**18.** Ординальные числа и их базовые свойства [вплоть до шагания по ординалам]. Замечание о том, что класс всех ординалов не является множеством.

**19.** Теорема о связи ординалов и в.у.м. Сложение и умножение ординалов. Упр. 10.1–10.2.

**20.** Теорема о трансфинитной рекурсии и её «частично-определённая» версия.

**21.** Теорема о трансфинитной «классовой рекурсии».

**22.** Теорема Цермело. Теорема о сравнимости по мощности.

**23.** Кардинальные числа и их простейшие свойства. Замечание о том, что класс всех кардиналов не является множеством. Сложение и умножение кардиналов. Упр. 10.4. Теорема том, что $\mathbb{R} \sim 2^{\mathbb{N}}$: идея доказательства. Упр. 8.1–8.4. Континуум-гипотеза [в терминах алефов].

**24.** Лемма Цорна (обычная и слегка обобщённая). Упражнения 11.1–11.3.

**25.** Теорема о том, что любое бесконечное множество равномощнно своему декартовому квадрату, а также основные следствия из неё.