Основные понятия теории множеств: 1/8

Станислав Олегович Сперанский

Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербург 2019

Общая информация

Литература:

K. Hrbacek and T. Jech. *Introduction to Set Theory*. 3rd ed., revised and expanded. Marcel Dekker, Inc., 1999.

T. Jech. *Set Theory*. 3rd ed., revised and expanded. Springer, 2002.

. . . .

Домашние задания:

http://users.math-cs.spbu.ru/∼speranski/

%см. Teaching » Basic Notions of Set Theory » Autumn 2019

Парадокс Рассела связан с неограниченным применением принципа выделения. Однако имеется немало подобных парадоксов, которые вовсе не связаны с понятием множества. Примером является

Парадокс Берри

Пусть n — наименьшее натуральное число, которое нельзя описать менее чем 11 словами. Тогда n описывается 10 словами.

Грубо говоря, ответственность за данный парадокс несёт туманное выражение «нельзя описать». Поэтому, прежде чем приступить к изложению аксиом теории множеств, по всей видимости, нужно пояснить смысл выражения «условие на объекты».

С полуформальной точки зрения условия — это специального рода выражения. Самые простые из них, называемые базовыми, имеют вид

$$x = y \quad \text{или} \quad x \in y,$$

где x и y суть переменные, играющие роль произвольных множеств. Здесь $x = y$ читается как “x равно y”, или “x совпадает с y”.

Более сложные условия строятся из базовых с помощью обычных логических связок

$$\text{“не \dots”}, \quad \text{“\dots\ и \dots”}, \quad \text{“\dots\ или \dots”}$$
$$\text{“если \dots, то \dots”} \quad \text{и} \quad \text{“\dots\ тогда и только тогда, когда \dots”}$$

и кванторов

$$\text{“для любого } x, \dots\text{”} \quad \text{и} \quad \text{“существует } x \text{ такой, что \dots”},$$

в которых x пробегает произвольные множества. Нередко удобно прибегать к символической записи, обозначая логические связки соответственно через $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$ и $\leftrightarrow$, а кванторы — $\forall x$ и $\exists x$.

Аксиома экстенсиональности

Нередко можно услышать следующее: “Множество определяется своими элементами”. В нашей системе эта идея превращается в аксиому экстенсиональности:

$$\forall X\, \forall Y\, (\forall u\, (u \in X \leftrightarrow u \in Y) \to X = Y). \qquad \text{(Ext)}$$

Отметим, что «обратное» утверждение, а именно

$$\forall X\, \forall Y\, (X = Y \to \forall u\, (u \in X \leftrightarrow u \in Y)),$$

выглядит интуитивно очевидным, если понимать равенство двух объектов как их совпадение.

Аксиома пустого множества

Нет ничего проще, чем совокупность без единого элемента, существование которой нам гарантирует аксиома пустого множества:

$$\exists X\, \forall u\, (u \in X \leftrightarrow u \neq u). \qquad \text{(Empty)}$$

Разумеется, такое X будет единственно в силу Ext. Его обозначают через $\varnothing$ и называют пустым множеством.

Аксиома пары

Далее, наша система включает ряд аксиом, позволяющих получать новые множества из уже имеющихся. Простейшей из них является, пожалуй, аксиома пары:

$$\forall X\,\forall Y\,\exists Z\,\forall u\,(u \in Z \leftrightarrow (u = X \vee u = Y)). \qquad \text{(Pair)}$$

Таким образом, если имеются X и Y, то можно получить Z, содержащее в точности X и Y. Полученное Z обозначают через $\{X, Y\}$ и называют неупорядоченной парой X и Y.

Схема аксиом выделения

Группы однородных аксиом обычно называют схемами. Так, для каждого условия $\Phi(x)$ имеется своя аксиома выделения:

$$\forall X\, \exists Y\, \forall u\, (u \in Y \leftrightarrow (u \in X \wedge \Phi(u))). \qquad \text{(Sep)}$$

По сути, она утверждает, что для всякого X мы можем образовать множество Y всех тех $u \in X$, которые удовлетворяют $\Phi(u)$; такое Y будет обозначаться через $\{u \in X \mid \Phi(u)\}$.

Вместе с тем выражение $\{u \mid \Phi(u)\}$ может и не задавать некоторого множества. Однако в случае, когда предварительно установлено, что $\exists Z\, \forall u\, (u \in Z \leftrightarrow \Phi(u))$ (а таких Z не может быть более одного ввиду Ext), мы будем считать его легитимным. Отметим следующее:

- для произвольных X и Y выражения

  $$X \cap Y \;:=\; \{u \mid u \in X \wedge u \in Y\} \quad \text{и} \quad X \setminus Y \;:=\; \{u \mid u \in X \wedge u \notin Y\}$$

  задают множества;

- для произвольного непустого X выражение

  $$\bigcap X \;:=\; \{u \mid u \in v \text{ для всех } v \in X\}$$

  задаёт множество.

Аксиома объединения

Соединять множества в одно целое позволяет аксиома объединения:

$$\forall X\,\exists Y\,\forall u\,(u \in Y \leftrightarrow \exists v\,(v \in X \wedge u \in v)). \qquad \text{(Union)}$$

Стало быть, выражение

$$\bigcup X \;:=\; \{u \mid u \in v \text{ для некоторого } v \in X\}$$

задаёт множество, которое традиционно называют объединением X. В частности, для произвольных X и Y мы можем определить

$$X \cup Y \;:=\; \bigcup\{X, Y\} \;=\; \{u \mid u \in X \vee u \in Y\},$$

называемое объединением X и Y.

Аксиома степени

Для того, чтобы сформулировать нашу следующую аксиому, удобно ввести сокращение

$$x \subseteq y \;:=\; \forall v\,(v \in x \to v \in y).$$

Если $X \subseteq Y$, то говорят, что X является подмножеством Y, или Y включает X. Аксиома степени гласит:

$$\forall X\, \exists Y\, \forall u\,(u \in Y \leftrightarrow u \subseteq X). \tag{Power}$$

Стало быть, выражение

$$\mathcal{P}(X) \;:=\; \{u \mid u \subseteq X\}$$

задаёт множество, которое называют множеством-степенью X.

Аксиома бесконечности

Рассмотрим условие

$$\mathrm{Ind}\,(x) \;:=\; \varnothing \in x \wedge \forall u\,(u \in x \to u \cup \{u\} \in x).$$

Будем называть X индуктивным, если верно $\mathrm{Ind}\,(X)$. Интуитивно каждое индуктивное множество бесконечно. Поэтому сформулируем аксиому бесконечности так:

$$\exists X\,\mathrm{Ind}\,(X). \tag{Inf}$$

Значит, Inf гарантирует существование некоторого индуктивного множества.

Схема аксиом подстановки

В нашей системе для каждого условия $\Phi(x,y)$ имеется своя аксиома подстановки:

$$\forall x\,\forall y_1\,\forall y_2\,((\Phi(x,y_1)\wedge\Phi(x,y_2))\to y_1=y_2)\to \\ \forall X\,\exists Y\,\forall y\,(y\in Y\leftrightarrow\exists x\,(x\in X\wedge\Phi(x,y))). \qquad (\mathrm{Repl})$$

Таким образом, в случае, когда $\Phi(x,y)$ удовлетворяет посылке Repl, т.е. в определенном смысле является «функциональным», для произвольного X выражение

$$\{y\mid\exists x\,(x\in X\wedge\Phi(x,y))\}$$

задаёт множество, своего рода «полный образ X относительно Φ».

Аксиома регулярности

Значительное влияние на структуру универса всех множеств оказывает аксиома регулярности:

$$\forall X \, (X \neq \varnothing \to \exists u \, (u \in X \wedge X \cap u = \varnothing)). \qquad \text{(Reg)}$$

(Нет необходимости воспринимать эту аксиому слишком серьёзно.)

Отношения

Под бинарными (или двухместными) отношениями между X и Y мы будем понимать произвольные подмножества $X \times Y$. В частности, при $X = Y$ мы будем называть их ещё бинарными (или же двухместным) отношениями на X.

По аналогии можно было бы дать определение трёхместных, четырёхместных и т.д. отношений, однако ключевую роль всё же играют именно двухместные.

Пусть $R \subseteq X \times Y$. Временами мы будем использовать «инфиксную нотацию» и писать xRy вместо $(x, y) \in R$. Множества

$$\mathrm{dom}\,(R) \;:=\; \{u \in X \mid \exists v\, uRv\} \quad \text{и}$$

$$\mathrm{range}\,(R) \;:=\; \{v \in Y \mid \exists u\, uRv\},$$

называют областью определения и областью значений R соответственно. Для каждого $U \subseteq X$ множество

$$R\,[U] \;:=\; \mathrm{range}\,(R \cap U \times Y) \;=\; \{v \in Y \mid \exists u\,(u \in U \wedge uRv)\}$$

называется образом U относительно R.

Обратное отношение к R определяется как

$$R^{-1} \;:=\; \{(y,x) \mid (x,y) \in R\}$$

Очевидно, его существование (как множества) гарантирует Sep, ведь для произвольной $(x,y) \in R$ выполнено $(y,x) \in Y \times X$. Если $V \subseteq Y$, то образ V относительно R^{-1} нередко называют прообразом V относительно R. Отметим, что

$$\begin{aligned} \operatorname{range}(R) &= \operatorname{dom}\left(R^{-1}\right) &= R[X], \\ \operatorname{range}\left(R^{-1}\right) &= \operatorname{dom}(R) &= R^{-1}[Y]. \end{aligned}$$

Бинарные отношения можно естественным образом комбинировать: для любых $R \subseteq X \times Y$ и $Q \subseteq Y \times Z$ множество

$$R \circ Q \ := \ \{(x, z) \in X \times Z \mid \exists y \, (xRy \wedge yQz)\}$$

называется композицией R и Q. Среди бинарных отношений на X особое место занимает

$$\mathrm{id}_X \ := \ \{(x, x) \mid x \in X\} \ = \ \{(x, y) \in X^2 \mid x = y\},$$

называемое тождественным отношением на X.

Говорят, что $R \subseteq X \times Y$ функционально, если

$$\forall x \, \forall y_1 \, \forall y_2 \, ((xRy_1 \wedge xRy_2) \to y_1 = y_2).$$

Далее, R называют функцией из X в Y, и пишут $R : X \to Y$, если $\mathrm{dom}\,(R) = X$ и R функционально.

Пусть $f : X \to Y$. Значит, для любого $x \in X$ имеется единственное $y \in Y$ такое, что $(x, y) \in f$, которое называется значением f в x и обозначается через $f\,(x)$. Так, мы получаем

$$\mathrm{range}\,(f) \;=\; \{f\,(x) \mid x \in X\}.$$

Для каждого $U \subseteq X$ ограничение (или сужение) f *на* U определяется как

$$f \restriction_U \ := \ f \cap U \times Y.$$

Разумеется, $f \restriction_U$ будет функцией из U в Y. Вообще, если $f : X \to Y$ и $g : U \to Y$ таковы, что $U \subseteq X$ и $f \restriction_U = g$, то g называют ограничением f, а f — расширением g. Обозначим

$$Y^X \ := \ \{f \mid f : X \to Y\}.$$

Под двухместными, трёхместными и т.д. функциями из X в Y понимают элементы Y^{X^2}, Y^{X^3} и т.д.

Функцию f из X в Y называют:

- сюрьективной, или на, если $\mathrm{range}(f) = Y$;
- инъективной, или одно-однозначной, если f^{-1} функционально.
- биективной, если f сюрьективна и инъективна.

Сюрьективные функции также называют сюрьекциями, инъективные — инъекциями, а биективные — биекциями. То, что f является биекцией из X на Y, иногда записывается так:

$$f : X \xrightarrow[\text{на}]{1\text{-}1} Y.$$