Основные понятия теории множеств: 2/8

Станислав Олегович Сперанский

Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербург 2019

Аксиома выбора

Особое место в нашей системе занимает аксиома выбора:

$$\forall X \left(\varnothing \notin X \to \exists f \left(f : X \to \bigcup X \wedge \forall u \in X \left(f(u) \in u \right) \right) \right). \qquad (\mathrm{C})$$

Несмотря на довольно неоднозначную историю этой аксиомы, ныне она считается стандартной.

Натуральные числа и индукция

Важным следствием Inf является

$$\exists X\,(\mathrm{Ind}\,(X) \wedge \forall Y\,(\mathrm{Ind}\,(Y) \to X \subseteq Y)). \qquad \text{(Nat)}$$

Ясно, что Nat гарантирует существование наименьшего по включению индуктивного множества, которое обозначают через $\mathbb{N}$, или $\aleph_0$, или ω. Элементы $\mathbb{N}$ называют натуральными числами, разумеется.

Вывести Nat из Inf можно с помощью Sep. Действительно, зафиксируем какое-нибудь индуктивное множество X_0. Возьмём

$$\mathbb{N} \;:=\; \{x \in X_0 \mid \forall X\,(\mathrm{Ind}\,(X) \to x \in X)\}.$$

По построению $\forall X\,(\mathrm{Ind}\,(X) \to \mathbb{N} \subseteq X)$. Кроме того, легко проверить, что $\mathrm{Ind}\,(\mathbb{N})$.

Определим функцию последователя из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$ как

$$\mathsf{s} \;:=\; \{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m = n \cup \{n\}\}.$$

Для $n \in \mathbb{N}$ вместо $\mathsf{s}(n)$ нередко пишут $n+1$. Итак, с неформальной точки зрения $\mathbb{N}$ содержит в точности

$$\begin{aligned} 0 \;&:=\; \varnothing, \\ 1 \;&:=\; 0+1 \;=\; \{0\}, \\ 2 \;&:=\; 1+1 \;=\; \{0,1\}, \\ &\;\vdots \end{aligned}$$

Под (естественным) порядком на $\mathbb{N}$ мы будем понимать

$$< \;:=\; \{(n,m) \in \mathbb{N}^2 \mid n \in m\}.$$

Разумеется, для всех $n, m \in \mathbb{N}$ верно следующее:

i. $\neg n < 0$;

ii. $n < m + 1 \leftrightarrow (n < m \vee n = m)$.

При выводе более сложных утверждений используется:

Теорема (принцип индукции)

Пусть X удовлетворяет условию

$$0 \in X \wedge \forall n \in \mathbb{N}\,(n \in X \to n + 1 \in X).$$

Тогда $\forall n \in \mathbb{N}\; n \in X$, т.е. $\mathbb{N} \subseteq X$. □

Замечание: в роли X могут выступать, например, множества вида $\{n \in \mathbb{N} \mid \Phi\,(n)\}$, а значит, в формулировке теоремы «$n \in X$» можно заменить на «$\Phi\,(n)$».

Следствие

Для любого $n \in \mathbb{N}$ *верно* $n \subseteq \mathbb{N}$, *т.е.* $n = \{m \in \mathbb{N} \mid m < n\}$.

Доказательство.

Рассмотрим условие

$$\Phi(x) \;:=\; x \subseteq \mathbb{N}.$$

Установим по индукции, что $\forall n \in \mathbb{N}\, \Phi(n)$.

База индукции: Разумеется, $0 \subseteq \mathbb{N}$.

Шаг индукции: Предположим, что $n \in \mathbb{N}$ и $n \subseteq \mathbb{N}$. Тогда, очевидно, $n + 1 \subseteq \mathbb{N}$. □

Следствие

Для всех $n, m, k \in \mathbb{N}$ *верно следующее:*

i. $(m < k \wedge k < n) \to m < n$;

ii. $\neg n < n$. *%без применения* Reg

Доказательство.

$\boxed{\text{i.}}$ Простая индукция по n.

$\boxed{\text{ii.}}$ Простая индукция по n.

Подробности см. на доске. □

Следствие

Для всех $n, m \in \mathbb{N}$ верно следующее:

i. $0 < n \vee 0 = n$;

ii. $m < n \leftrightarrow (m + 1 < n \vee m + 1 = n)$;

iii. $n < m \vee n = m \vee m < n$.

(При этом в (iii) дизъюнкты взаимно исключают друг друга.)

Доказательство.

$\boxed{\text{i.}}$ Простая индукция по n.

$\boxed{\text{ii.}}$ Простая индукция по n.

$\boxed{\text{iii.}}$ Простая индукция по n.

Подробности см. на доске. □

Возвратная индукция

Теорема (принцип возвратной индукции)

Пусть X удовлетворяет условию

$$\forall n \in \mathbb{N}\, (\forall m < n\; m \in X \to n \in X).$$

Тогда $\forall n \in \mathbb{N}\; n \in X$, *т.е.* $\mathbb{N} \subseteq X$.

Доказательство.

Рассмотрим условие

$$\Phi(x) \;:=\; x \subseteq X.$$

<u>База индукции</u>: Очевидно, $\varnothing \subseteq X$.

<u>Шаг индукции</u>: Предположим, что $n \subseteq X$. Согласно условию, $n \subseteq X$ влечёт $n \in X$. Стало быть, $n + 1 \subseteq X$.

В итоге мы установили, что $\forall n \in \mathbb{N}\; n \subseteq X$. В частности, для всякого $n \in \mathbb{N}$ имеет место $n + 1 \subseteq X$, а потому $n \in X$. $\square$

Для произвольного X обозначим

$$\mathrm{Min}\,(X) \;:=\; \{x \in X \mid \neg\exists u \in X\; u \in x\}.$$

Элементы $\mathrm{Min}\,(X)$ мы будем называть $\in$-минимальными в X.

Теорема (принцип минимального элемента)

Если $X \subseteq \mathbb{N}$ и $X \neq \varnothing$, то $\mathrm{Min}\,(X) \neq \varnothing$.

Доказательство.

Пусть $X \subseteq \mathbb{N}$ и $\mathrm{Min}\,(X) = \varnothing$. Возьмём $Y := \mathbb{N} \setminus X$. Заметим, что

$$\forall n \in \mathbb{N}\,(\forall m < n\; m \in Y \to n \in Y).$$

Действительно, если $\forall m < n\; m \in Y$, что равносильно $\forall m < n\; m \notin X$, то $n \in Y$ (поскольку иначе n окажется $\in$-минимальным в X). Стало быть, $Y = \mathbb{N}$ по принципу возвратной индукции, откуда $X = \varnothing$. $\square$

Рекурсия на натуральных числах

Корректность простейших рекурсивных определений функций из $\mathbb{N}$ в Y гарантирует:

Теорема (о рекурсии)

Пусть $y_0 \in Y$ и $h : \mathbb{N} \times Y \to Y$. Тогда существует и единственная $f : \mathbb{N} \to Y$ такая, что для любого $n \in \mathbb{N}$,

$$f(n) = \begin{cases} y_0 & \text{если } n = 0, \\ h(m, f(m)) & \text{если } n = m + 1. \end{cases} \qquad (\star)$$

Доказательство.

Пусть $k \in \mathbb{N}$. Будем называть функцию f из $k+1$ в Y правильной, если $(\star)$ верно для всех $n \in k+1$. Рассмотрим

$$S \ := \ \{k \in \mathbb{N} \mid \text{сущ-ет единственная правильная } f : k+1 \to Y\}.$$

Для каждого $k \in S$ через f_k мы будем обозначать соответствующую (единственную) правильную функцию из $k+1$ в Y.

Давайте установим по индукции, что $S = \mathbb{N}$.

База индукции: Очевидно, $\{(0, y_0)\}$ — это единственная правильная функция из $0+1$ в Y. Стало быть, $0 \in S$.

...

Доказательство (продолжение).

Шаг индукции: Предположим, что $k \in S$. Определим

$$f_k' \;:=\; f_k \cup \{(k+1, h(k, f_k(k)))\}.$$

Как можно легко видеть, f_k' — правильная функция из $(k+1)+1$ в Y. Проверим её единственность. Пусть g — правильная функция из $(k+1)+1$ в Y. Тогда:

a. ограничение g на $k+1$ является правильным, а потому совпадает с f_k, т.е. с ограничением f_k' на $k+1$;

b. $g(k+1) = h(k, g(k)) = h(k, f_k(k)) = h(k, f_k'(k)) = f_k'(k+1)$.

Следовательно, g совпадает с f_k'. Таким образом, $k+1 \in S$.

Теперь уже нетрудно убедиться, что

$$f \;:=\; \bigcup \{f_k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

является искомой функцией из $\mathbb{N}$ в Y. □

Теорема (о рекурсии, параметризованная)

Пусть $g_0 \in Y^X$ *и* $h : X \times \mathbb{N} \times Y \to Y$. *Тогда существует и единственная* $f : X \times \mathbb{N} \to Y$ *такая, что для любых* $x \in X$ *и* $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x, n) = \begin{cases} g_0(x) & \text{если } n = 0, \\ h(x, m, f(x, m)) & \text{если } n = m + 1. \end{cases}$$

Доказательство.

Это утверждение можно свести к обычной теореме о рекурсии. Для каждой $(n, g) \in \mathbb{N} \times Y^X$ определим $h_{(n,g)} : X \to Y$ по правилу

$$h_{(n,g)}(x) := h(x, n, g(x)).$$

Рассмотрим $h' : \mathbb{N} \times Y^X \to Y^X$, действующую следующим образом:

$$h'(n, g) := h_{(n,g)}.$$

...

Доказательство (продолжение).

По теореме о рекурсии существует единственная $f' : \mathbb{N} \to Y^X$ такая, что для всех $n \in \mathbb{N}$,

$$f'(n) = \begin{cases} g_0 & \text{если } n = 0, \\ h'(m, f'(m)) & \text{если } n = m + 1. \end{cases}$$

В свою очередь, от f' можно перейти к $f : X \times \mathbb{N} \to Y$ по правилу

$$f(x, n) := f'(n)(x).$$

Нетрудно проверить, что f является искомой. □