Основные понятия теории множеств: 4/8

Станислав Олегович Сперанский

Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербург 2019

Конечные множества

Говорят, что X имеет n элементов (или X имеет мощность n), где $n \in \mathbb{N}$, если $X \sim n$. Далее, X называют конечным, если $X \sim n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, и бесконечным в противном случае.

В силу принципа Дирихле, для любых $\{n, m\} \subseteq \mathbb{N}$, если $n \sim m$, то $n = m$. В дальнейшем мы будем предполагать, что

$$\forall x \, (x \in \mathbb{N} \to \mathrm{Card}\,(x)).$$

Иными словами, натуральные числа суть кардиналы. В частности, для $n \in \mathbb{N}$ верно $|n| = n$, а $X \sim n$ можно переписать как $|X| = n$.

Из принципа Дирихле также следует, что $\mathbb{N}$ бесконечно. Кроме того, для любых $\{m, n\} \subseteq \mathbb{N}$,

$$m \leqslant n \quad \Longleftrightarrow \quad m \preccurlyeq n.$$

Поэтому введённый нами ранее порядок на натуральных числах совпадёт с порядком на мощностях конечных множеств.

Предложение

Пусть X бесконечно. Тогда $|X| > n$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство.

Несложная индукция по n.

Подробности см. на доске. $\square$

Предложение

Пусть X конечно и $|Y| \leqslant |X|$. Тогда Y конечно.

Доказательство.

Поскольку X конечно, то $|X| = n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Разумеется, Y должно быть конечным, поскольку иначе $n = |X| \geqslant |Y| > n$. $\square$

«Сложное доказательство».

Не ограничивая общности, можно считать, что $X = n$ и $Y \subseteq X$, где $n \in \mathbb{N}$. Используя рекурсию, определим $f : \subseteq \mathbb{N} \to Y$ по правилу

$$f(m) \;:=\; \text{«наименьший элемент } Y \setminus \operatorname{range}(f \restriction_m)\text{»}.$$

Нетрудно понять, что $f : \subseteq \mathbb{N} \xrightarrow[\text{на}]{\text{1-1}} Y$, причём $\operatorname{dom}(f) = m$ для некоторого $m \leqslant n$. $\square$

Предложение

Пусть $f : X \xrightarrow{\text{на}} Y$, *причём* X *конечно. Тогда* $|Y| \leqslant |X|$.

Доказательство.

Не ограничивая общности, мы можем считать, что $X = n$, где $n \in \mathbb{N}$. Определим $h : Y \to n$ по правилу

$$h(y) \; := \; \text{«наименьший элемент } f^{-1}[\{y\}]\text{»}.$$

Легко понять, что $h : Y \xrightarrow{\text{1-1}} n$. Стало быть, $|Y| \leqslant |n| = n$. □

Предложение

Пусть X *и* Y *конечны. Тогда* $X \cup Y$, $X \times Y$ *и* X^Y *конечны, причём*

$$|X \cup Y| = |X| + |Y \setminus X|,$$

$$|X \times Y| = |X| \cdot |Y| \quad \text{и} \quad \left|X^Y\right| = |X|^{|Y|}.$$

Доказательство.

Простая индукция по $|Y|$.

Подробности см. на доске. □

Про $\aleph_0$

Давайте называть X счётным, если $|X| = |\mathbb{N}|$. Говорят, что X более чем счётно, если $|X| > |\mathbb{N}|$, и не более чем счётно, если $|X| \leqslant |\mathbb{N}|$.

Про $\aleph_0$

Давайте называть X счётным, если $|X| = |\mathbb{N}|$. Говорят, что X более чем счётно, если $|X| > |\mathbb{N}|$, и не более чем счётно, если $|X| \leqslant |\mathbb{N}|$.

— Но...

Про $\aleph_0$

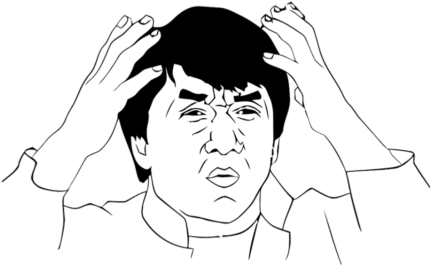
Давайте называть X счётным, если $|X| = |\mathbb{N}|$. Говорят, что X более чем счётно, если $|X| > |\mathbb{N}|$, и не более чем счётно, если $|X| \leqslant |\mathbb{N}|$.

— Но... должно же быть $|X| \ngtr |\mathbb{N}|$!...

Про $\aleph_0$

Давайте называть X счётным, если $|X| = |\mathbb{N}|$. Говорят, что X более чем счётно, если $|X| > |\mathbb{N}|$, и не более чем счётно, если $|X| \leqslant |\mathbb{N}|$.

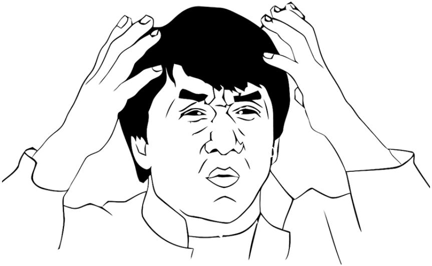
— Но... должно же быть $|X| \not> |\mathbb{N}|$!...



Про $\aleph_0$

Давайте называть X счётным, если $|X| = |\mathbb{N}|$. Говорят, что X более чем счётно, если $|X| > |\mathbb{N}|$, и не более чем счётно, если $|X| \leqslant |\mathbb{N}|$.

— Но... должно же быть $|X| \not> |\mathbb{N}|$!...



Предложение (в ZFC)

Пусть X бесконечно. Тогда существует счётное $Y \subseteq X$.

Доказательство.

Пусть η — какая-нибудь функция выбора для $\mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$. Используя рекурсию, определим $f : \mathbb{N} \to X$ по правилу

$$f(n) := \eta(X \setminus \operatorname{range}(f \restriction_n)).$$

Как легко видеть, $f : \mathbb{N} \xrightarrow{1\text{-}1} X$. Значит, $Y := \operatorname{range}(f)$ будет счётным подмножеством X. $\square$

В дальнейшем мы будем предполагать, что

$$\mathsf{Card}(\mathbb{N}).$$

Иными словами, $\mathbb{N}$ является кардиналом. Таким образом, $|\mathbb{N}| = \mathbb{N}$. Когда речь идёт о кардиналах, вместо $\mathbb{N}$ часто пишут $\aleph_0$.

Следствие (в ZFC)

$|X| > \aleph_0$ *тогда и только тогда, когда* X *бесконечно и несчётно.* $\square$

Предложение

$|X| \leqslant \aleph_0$ *тогда и только тогда, когда* X *конечно или счётно.*

Доказательство.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Тривиально.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Не ограничивая общности, здесь можно считать, что $X \subseteq \mathbb{N}$. Предположим, что X бесконечно. Используя рекурсию, определим $f : \mathbb{N} \to X$ по правилу

$$f(n) \;:=\; \text{«наименьший элемент } X \setminus \operatorname{range}(f \restriction_n)\text{»}.$$

Нетрудно проверить, что $f : \mathbb{N} \xrightarrow[\text{на}]{1\text{-}1} X$. $\square$

Следствие (в ZFC)

$|X| \not> \aleph_0$ *тогда и только тогда, когда* $|X| \leqslant \aleph_0$. $\square$

Предложение

Пусть $f : X \xrightarrow{\text{на}} Y$, *причём* X *не более чем счётно. Тогда* Y *не более чем счётно.*

Доказательство.

Не ограничивая общности, можно считать, что $X \subseteq \mathbb{N}$. Определим $h : Y \to X$ по правилу

$$h(y) \;:=\; \text{«наименьший элемент } f^{-1}[\{y\}]\text{»}.$$

Легко понять, что $h : Y \xrightarrow{1\text{-}1} X$. Стало быть, $|Y| \leqslant |X| \leqslant \aleph_0$. $\square$

В частности, мы получаем полезный критерий:

Следствие

Непустое X не более чем счётно тогда и только тогда, когда существует сюрьекция из $\mathbb{N}$ на X. $\square$

Ещё одно полезное наблюдение:

Следствие

Пусть R — отношение эквивалентности на X, причём X не более чем счётно. Тогда $X_{/R}$ не более чем счётно. $\square$

Предложение

Пусть X и Y не более чем счётны. Тогда $X \times Y$ не более чем счётно.

Доказательство.

Не ограничивая общности, мы можем считать, что $X, Y \subseteq \mathbb{N}$. Стало быть, нужно установить счётность $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Определим $\nu : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ по правилу

$$\nu(n, m) \ := \ 2^n \cdot (2m + 1) - 1.$$

Нетрудно проверить, что ν будет биекцией между $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ и $\mathbb{N}$. $\square$

Разумеется, теперь уже легко установить счётность $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{N}^3$, $\mathbb{N}^4$ и так далее (или $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ и так далее). $\flat$

Следствие

Пусть X и Y не более чем счётны. Тогда $X \cup Y$ не более чем счётно.

Доказательство.

Поскольку X и $Y \setminus X$ равномощны некоторым подмножествам соответственно $\mathbb{N} \times \{0\}$ и $\mathbb{N} \times \{1\}$, то $X \cup (Y \setminus X) = X \cup Y$ равномощно подмножеству $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, а потому не более чем счётно. □

Следствие

Пусть X конечно, причём его элементы не более чем счётны. Тогда $\bigcup X$ не более чем счётно.

Доказательство.

Простая индукция по $|X|$.

Подробности см. на доске. □

Теорема

Пусть f — бесконечная последовательность бесконечных последовательностей. Тогда $\bigcup \{\mathrm{range}\,(f_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ *не более чем счётно.*

Доказательство.

Определим $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup \{\mathrm{range}\,(f_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ по правилу

$$g\,(n, m) \;:=\; (f\,(n))\,(m).$$

Легко понять, что g сюрьективна. $\square$

Следствие (в ZFC)

Пусть X не более чем счётно, причём его элементы также не более чем счётны. Тогда $\bigcup X$ не более чем счётно.

Доказательство.

Не ограничивая общности, можно считать, что $X \neq \varnothing$ и $\varnothing \notin X$. Для каждого $U \in X$ определим

$$\mathrm{Sur}\,(U) \;:=\; \left\{ f \mid f : \mathbb{N} \xrightarrow{\text{на}} U \right\}.$$

Как мы знаем, $\mathrm{Sur}\,(U) \neq \varnothing$ для всех $U \in X$. Возьмём

$$\mathscr{S} \;:=\; \{\mathrm{Sur}\,(U) \mid U \in X\}.$$

Пусть η — функция выбора для $\mathscr{S}$. Её можно превратить в последовательность (последоват-ей), а затем применить теорему выше.

Подробности см. на доске. □

Теорема

Пусть X не более чем счётно и непусто. Тогда X^* счётно.

Доказательство.

По условию найдётся $\xi : \mathbb{N} \xrightarrow{\text{на}} X$. Очевидно, для всех $f \in \mathbb{N}^*$ верно $f \circ \xi \in X^*$. Рассмотрим $\rho : \mathbb{N}^* \to X^*$, действующую по правилу

$$\rho(f) \ := \ f \circ \xi.$$

Легко понять, что $\rho : \mathbb{N}^* \xrightarrow{\text{на}} X^*$. Поэтому достаточно показать, что $\mathbb{N}^*$ счётно и X^* бесконечно.

...

Доказательство (продолжение).

Пусть $\nu : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow[\text{на}]{\text{1-1}} \mathbb{N}$. Разумеется, можно построить $\mathrm{left} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и $\mathrm{right} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такие, что

$$\mathrm{left}\,(\nu\,(n, m)) = n \quad \text{и} \quad \mathrm{right}\,(\nu\,(n, m)) = m.$$

Далее, используя рекурсию, можно определить последовательность последовательностей f, удовлетворяющую следующим условиям:

$$\begin{aligned} f_0\,(i) &= \varnothing \\ f_{n+1}\,(i) &= f_n\,(\mathrm{left}\,(i)) \cup \{(n, \mathrm{right}\,(i))\}. \end{aligned}$$

Как нетрудно убедиться, для любого $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{range}\,(f_n) = \{g \mid g : n \to \mathbb{N}\}.$$

Поэтому $\bigcup \{\mathrm{range}\,(f_n) \mid n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}^*$. Стало быть, $\mathbb{N}^*$ счётно.

. . .

Доказательство (последние штрихи).

Осталось проверить, что X^* бесконечно. Зафиксируем какой-нибудь $x \in X$. Определим $h : \mathbb{N} \to X^*$ по правилу

$$h(n) \;:=\; n \times \{x\},$$

т.е. $h(n)$ представляет собой последовательность длины n из x. При этом $h : \mathbb{N} \xrightarrow{1\text{-}1} X^*$, а потому X^* не может быть конечным. $\square$

Для произвольного X обозначим

$$\mathcal{P}_{\text{fin}}(X) := \{Y \mid Y \subseteq X \text{ и } Y \text{ конечно}\}.$$

Отметим, что в теореме Кантора нельзя заменить $\mathcal{P}$ на $\mathcal{P}_{\text{fin}}$:

Следствие

Пусть X счётно. Тогда $\mathcal{P}_{\text{fin}}(X)$ счётно.

Доказательство.

Рассмотрим $\xi : X^* \to \mathcal{P}_{\text{fin}}(X)$, действующую по правилу

$$\xi(f) := \operatorname{range}(f).$$

Легко видеть, что ξ будет сюръекцией. $\square$

Теорема (в ZFC)

Пусть X бесконечно, а Y не более чем счётно. Тогда $|X \cup Y| = |X|$.

Доказательство.

Не ограничивая общности, можно считать, что $X \cap Y = \varnothing$. При этом у X имеется некое счётное подмножество Z. Ясно, что $Y \cup Z$ счётно. Пусть $f : Y \cup Z \xrightarrow[\text{на}]{\text{1-1}} Z$. Определим $g : X \cup Y \to X$ по правилу

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & \text{если } x \in Y \cup Z, \\ x & \text{иначе.} \end{cases}$$

Легко понять, что $g : X \cup Y \xrightarrow[\text{на}]{\text{1-1}} X$. $\square$

Следствие (в ZFC)

Пусть X более чем сч., а Y не более чем сч. Тогда $|X \setminus Y| = |X|$.

Доказательство.

Возьмём $U := X \cap Y$ и $V := X \setminus U$. Ясно, что U не более чем счётно, а V бесконечно. Значит, $|X \setminus Y| = |V| = |U \cup V| = |X|$. □