Основные понятия теории множеств: 6/8

Станислав Олегович Сперанский

Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербург 2019

Ординальные числа

Будем называть X транзитивным, если $\bigcup X \subseteq X$, что равносильно $X \subseteq \mathcal{P}(X)$. Для произвольного X определим

$$\in_X \; := \; \{(u, v) \in X \times X \mid u \in v\}.$$

Мы будем говорить, что X является ординалом, или ординальным числом, если X транзитивно и $\in_X$ — строгий полный порядок на X. Для обозначения ординалов используют α, β, γ и их производные. При этом вместо $\alpha \in \beta$ нередко используется запись $\alpha < \beta$.

Замечание: среди ординальных чисел есть все элементы $\mathbb{N}$ и само $\mathbb{N}$; когда речь идет об ординалах, вместо $\mathbb{N}$ часто пишут ω.

Предложение

Пусть α *— ординал и* $X \in \alpha$. *Тогда* X *— ординал.*

Доказательство.

Проверим транзитивность X: если $u \in v$ и $v \in X$, то $\{u, v\} \subseteq \alpha$ ввиду транзитивности α, а потому $u \in X$, в силу транзитивности $\in_\alpha$. Кроме того, $X \subseteq \alpha$. Поэтому $\in_X$ — строгий полный порядок на X. □

Таким образом, каждый ординал α равен множеству всех ординалов, которые меньше α. Также стоит отметить следующее.

Предложение

Пусть α *— ординал и* $\beta \in \alpha$. *Тогда* $\beta = [0, \beta)$. □

Альтернативное определение $<$ на классе всех ординалов даёт:

Предложение

Для любых ординалов α и β,

$$\alpha \in \beta \iff \alpha \subsetneq \beta.$$

Доказательство.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Очевидно.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Предположим, что $\alpha \subsetneq \beta$. Возьмём

$$\gamma \ := \ \text{наименьший элемент для } \beta \setminus \alpha \text{ в } \langle \beta, \in_\beta \rangle.$$

Нетрудно понять, что α совпадает с $\{x \in \beta \mid x < \gamma\}$, т.е. $\alpha = \gamma$. $\square$

Далее, используя эти результаты, можно доказать, что $<$ ведёт себя подобно строгому полному порядку на классе всех ординалов:

Теорема

Для любых ординалов α, β и γ верно следующее:

i. $\alpha \not< \alpha$;

ii. *если* $\alpha < \beta$ *и* $\beta < \gamma$, *то* $\alpha < \gamma$;

iii. *либо* $\alpha = \beta$, *либо* $\alpha < \beta$, *либо* $\beta < \alpha$;

iv. *для всякого непустого множества ординалов* X *верно* $\bigcap X \in X$, *причём* $\bigcap X$ *является наименьшим в* $\langle X, \in_X \rangle$.

Доказательство.

$\boxed{\text{i.}}$ Допустим, что $\alpha \in \alpha$. Тогда $\alpha \in_\alpha \alpha$ — противоречие.

$\boxed{\text{ii.}}$ Немедленно следует из транзитивности γ.

$\boxed{\text{iv.}}$ Легко видеть, что $\bigcap X$ будет ординалом. При этом для любого $\alpha \in X$ верно $\bigcap X \subseteq \alpha$, т.е. $\bigcap X \leqslant \alpha$. Если $\bigcap X \notin X$, то $\bigcap X < \alpha$ для всех $\alpha \in X$, откуда $\bigcap X \in \bigcap X$ — противоречие.

$\boxed{\text{iii.}}$ В силу (iv), в $\{\alpha, \beta\}$ есть наименьший элемент, а потому α и β должны быть сравнимы по $\leqslant$. $\square$

Следствие

Пусть X — транзитивное множество ординалов. Тогда X — ординал.

Доказательство.

В сиду теоремы выше, $\in_X$ будет строгим полным порядком на X. $\square$

Пусть X — множество ординалов. Очевидно, транзитивность X равносильна тому, что для любых ординалов α и β,

$$\alpha < \beta \quad \text{и} \quad \beta \in X \quad \Longrightarrow \quad \alpha \in X,$$

а потому мы можем воспринимать транзитивное X как «начальный сегмент» в классе всех ординалов относительно $<$.

Теорема

Пусть X — множество ординалов. Тогда $\bigcup X$ — ординал, причём $\bigcup X$ является «супремумом X» в классе всех ординалов относительно $\in$.

Доказательство.

Легко проверить, что $\bigcup X$ транзитивно. Далее, $\bigcup X$ — это множество ординалов, а потому $\in$ задаёт на нём строгий полный порядок, ввиду предыдущей теоремы. Значит, $\bigcup X$ является ординалом.

Наконец, заметим, что $\bigcup X$ является «супремумом X» в классе всех множеств относительно $\subsetneq$, тем более в классе всех ординалов, а $\subsetneq$ и $\in$ совпадают на ординалах. $\square$

Стоит отметить, что для каждого ординала α множество

$$\alpha + 1 \ := \ \alpha \cup \{\alpha\}$$

является ординалом; при этом $\alpha \subsetneq \alpha + 1$ и не существует X такого, что $\alpha \subsetneq X \subsetneq \alpha + 1$. Ненулевой ординал α называется непредельным, если $\alpha = \beta + 1$ для некоторого ординала β, и предельным в противном случае. Как легко видеть, для любых ординалов α и β,

$$\alpha \ = \ \beta \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha + 1 \ = \ \beta + 1.$$

Значит, у всякого непредельного ординала α имеется единственный «предшественник», которого можно обозначить через $\alpha - 1$.

В дальнейшем мы будем считать, что 0 также является предельным. Нетрудно проверить, что для любого ординала α,

$$\bigcup \alpha = \begin{cases} \alpha - 1 & \text{если } \alpha \text{ непредельный} \\ \alpha & \text{если } \alpha \text{ предельный.} \end{cases}$$

При этом ω оказывается наим. ненулевым предельным ординалом, а натуральные числа суть в точности ординалы, которые меньше ω.

Используя «классовую рекурсию», можно добраться и до некоторых бо́льших ординалов. К примеру:

$$\omega \qquad \omega + 1 \qquad \omega + 1 + 1 \qquad \ldots \qquad \omega + \omega,$$

где $\omega + \omega$ обозначает $\bigcup \{\omega, \omega + 1, \omega + 1 + 1, \ldots\}$.

Напрягая воображение, шагаем по ординалам

$\omega+\omega$	$\omega+\omega+\omega$	$\omega+\omega+\omega+\omega$	$\ldots$	$\omega\cdot\omega$
эх	раз	да ещё раз	да ещё много раз	

Напрягая воображение, шагаем по ординалам

$\omega+\omega$	$\omega+\omega+\omega$	$\omega+\omega+\omega+\omega$	$\dots$	$\omega\cdot\omega$
эх	раз	да ещё раз	да ещё много раз	
$\omega\cdot\omega$	$\omega\cdot\omega\cdot\omega$	$\omega\cdot\omega\cdot\omega\cdot\omega$	$\dots$	ω^ω
эх	раз	да ещё раз	да ещё много раз	

Напрягая воображение, шагаем по ординалам

$\omega+\omega$	$\omega+\omega+\omega$	$\omega+\omega+\omega+\omega$	$\ldots$	$\omega\cdot\omega$
эх	раз	да ещё раз	да ещё много раз	
$\omega\cdot\omega$	$\omega\cdot\omega\cdot\omega$	$\omega\cdot\omega\cdot\omega\cdot\omega$	$\ldots$	ω^{ω}
эх	раз	да ещё раз	да ещё много раз	

Напрягая воображение, шагаем по ординалам

$\omega+\omega$	$\omega+\omega+\omega$	$\omega+\omega+\omega+\omega$	$\ldots$	$\omega\cdot\omega$
эх	раз	да ещё раз	да ещё много раз	
$\omega\cdot\omega$	$\omega\cdot\omega\cdot\omega$	$\omega\cdot\omega\cdot\omega\cdot\omega$	$\ldots$	ω^ω
эх	раз	да ещё раз	да ещё много раз	

ω^ω	ω^{ω^ω}	$\omega^{\omega^{\omega^\omega}}$	$\ldots$	ε_0
эх	раз	да ещё раз	да ещё много раз	

Ясно, что для любых ординалов α и β,

$$\langle \alpha, \in_\alpha \rangle \;\simeq\; \langle \beta, \in_\beta \rangle \quad\Longleftrightarrow\quad \alpha \;=\; \beta.$$

Более того, имеет место:

Теорема (о связи ординалов и в.у.м.)

Пусть $\mathfrak{A}$ — в.у.м. Тогда существует и единственный ординал α такой, что $\mathfrak{A}$ изоморфно $\langle \alpha, \in_\alpha \rangle$.

Доказательство.

Единственность мы уже отметили.

...

Доказательство (продолжение).

Докажем существование подходящего α. Для этого рассмотрим

$$S \; := \; \left\{ a \in A \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{существует ординал } \alpha_a \text{ такой, что} \\ [0, a)_{\mathfrak{A}} \text{ и } \alpha_a \text{ изоморфны как в.у.м.} \end{array} \right\}.$$

Разумеется, для каждого $a \in S$ соответствующий ординал α_a определяется однозначно. Поэтому, применив Repl, можно взять

$$X \; := \; \{\alpha_a \mid a \in S\}.$$

Как известно, изоморфизмы в.у.м. переводят начальные сегменты в начальные сегменты. Стало быть, S окажется начальным сегментом $\mathfrak{A}$, а X — «начальным сегментом» в классе всех ординалов (относительно $<$). Следовательно, X — ординал.

. . .

Доказательство (окончание).

Теперь определим $f : S \to X$ по правилу

$$f(a) := \alpha_a.$$

Нетрудно видеть, что f окажется изоморфизмом. Предположим, что $A \setminus S \neq \varnothing$, а значит, $S = [0, a)$, где a — наименьший элемент в $A \setminus S$. Но тогда $a \in S$ — противоречие. Стало быть, $S = A$. □

Сложение и умножение ординалов

Если $\mathfrak{A}$ — в.у.м., то $\mathrm{ord}\,(\mathfrak{A})$ будет обозначать ординал α такой, что $\mathfrak{A}$ изоморфно $\langle \alpha, \in_\alpha \rangle$. Для любых ординалов α и β определим

$$\alpha + \beta \ := \ \mathrm{ord}\,(\langle \alpha, \in_\alpha \rangle \oplus \langle \beta, \in_\beta \rangle), \qquad \text{Error!}$$

$$\alpha \cdot \beta \ := \ \mathrm{ord}\,(\langle \alpha, \in_\alpha \rangle \otimes \langle \beta, \in_\beta \rangle). \qquad \checkmark$$

Очевидно, при данной интерпретации $\alpha + 1$ совпадает с $\alpha \cup \{\alpha\}$, т.е. расхождения с введённым ранее обозначением не возникает.

Замечание: на самом деле, класс-операции сложения и умножения на ординалах обычно определяют, используя подходящее обобщение теоремы о рекурсии, однако в результате получится то же самое.

Одно полезное наблюдение

Отметим, что класс всех ординалов

$$\mathrm{Ord} \ := \ \{\alpha \mid \alpha \text{ — ординал}\}$$

не является множеством. Действительно, в противном случае Ord оказался бы ординалом, и мы получили бы $\mathrm{Ord} \in \mathrm{Ord}$.