Основные понятия теории множеств: 7/8

Станислав Олегович Сперанский

Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербург 2019

Для любых множества X и ординала α обозначим

$$X^{<\alpha} \ := \ \{f \mid \exists\beta < \alpha\,(f : \beta \to X)\}.$$

Вообще, если $f : \beta \to X$, где β — ординал, то f называют β-посл-тью элементов X, или трансфинитной последовательностью элементов X длины β; поэтому $X^{<\alpha}$ — это просто множество всех трансфинитных последовательностей элементов X длины меньше α.

Теорема (о трансфинитной рекурсии)

Фиксируем некоторый ординал α. Пусть $h : X^{<\alpha} \to X$. Тогда существует и единственная $f : \alpha \to X$ такая, что для любого $\beta \in \alpha$,

$$f(\beta) = h(f \restriction_\beta). \qquad (\star)$$

Доказательство.

Пусть $\gamma \in \alpha$. Мы будем называть функцию f из $\gamma + 1$ в X чудесной, если $(\star)$ верно для всех $\beta \in \gamma + 1$. Рассмотрим

$$S := \{\gamma \in \alpha \mid \text{сущ-ет единственная чудесная } f : \gamma + 1 \to X\}.$$

Для каждого $\gamma \in S$ через f_γ мы будем обозначать соответствующую (единственную) чудесную функцию из $\gamma + 1$ в X.

...

Доказательство (продолжение).

Заметим, что для любых $\gamma, \gamma' \in S$,

$$\gamma \leqslant \gamma' \implies f_\gamma \subseteq f_{\gamma'}.$$

Действительно, пусть $\{\gamma, \gamma'\} \subseteq S$ и $\gamma \leqslant \gamma'$; тогда ограничение $f_{\gamma'}$ на $\gamma + 1$, очевидно, является чудесным, а потому совпадает с f_γ.

Давайте установим по трансфинитной индукции, что $S = \alpha$.

Пусть $\gamma \in \alpha$. Предположим, что для каждого $\beta < \gamma$ имеется единственная чудесная функция f_β из $\beta + 1$ в X. Возьмём

$$R := \bigcup \{f_\beta \mid \beta < \gamma\}.$$

...

Доказательство (продолжение).

Легко видеть, что R — функция из γ в X, причём для всякого $\beta < \gamma$ ограничение R на $\beta + 1$ совпадает с f_β. Далее, возьмём

$$g \ := \ R \cup \{(\gamma, h(R))\}.$$

Разумеется, g будет чудесной функцией из $\gamma + 1$ в X. Осталось лишь установить её единственность. Пусть g' — чудесная функция из $\gamma + 1$ в X. Проверим, что $g(\beta) = g'(\beta)$ для всех $\beta \in \gamma + 1$.

- Если $\beta \in \gamma$, то $\beta + 1 \subseteq \gamma$ и ограничение g' на $\beta + 1$, будучи чудесным, совпадает с f_β, т.е. с ограничением g на $\beta + 1$, а потому $g'(\beta) = g(\beta)$. В итоге $g \restriction_\gamma = g' \restriction_\gamma$.
- Более того, $g'(\gamma) = h(g' \restriction_\gamma) = h(g \restriction_\gamma) = g(\gamma)$.

Таким образом, $g = g'$. Поэтому $\gamma \in S$ и $f_\gamma = g$.

...

Доказательство (окончание).

В силу принципа трансфинитной индукции, $S = \alpha$. Определим

$$f \ := \bigcup \{f_\gamma \mid \gamma \in \alpha\}.$$

Нетрудно убедиться, что f окажется нужной функцией из α в X. $\square$

Теорему о трансфинитной рекурсии можно параметризовать, но это нужно главным образом для ординальной арифметики и комбинаторики, которыми мы пока заниматься не собираемся.

Частично-определённая трансфинитная рекурсия

Теорема (о трансфинитной рекурсии, частичной)

Фиксируем некоторый ординал α. Пусть $h :\subseteq X^{<\alpha} \to X$. Тогда сущ. и единственная $f :\subseteq \alpha \to X$ такая, что:

a. *для любого $\beta \in \mathrm{dom}\,(f)$,*

$$f\,(\beta) \;=\; h(f\restriction_{\beta});$$

b. *либо $\mathrm{dom}\,(f) = \alpha$, либо $\mathrm{dom}\,(f) = \gamma$ для некоторого $\gamma < \alpha$, причём $f \notin \mathrm{dom}\,(h)$.*

Доказательство.

Зафиксируем какой-нибудь объект ы $\notin X$ и положим $X' := X \cup \{ы\}$. Теперь расширим h до $h' : (X')^{<\alpha} \to X'$ следующим образом:

$$h'(g') := \begin{cases} h(g') & \text{если ы} \notin \mathrm{range}(g') \text{ и } g' \in \mathrm{dom}(h), \\ \text{ы} & \text{иначе.} \end{cases}$$

В силу теоремы о трансфинитной рекурсии, существует и единственная $f' : \alpha \to X'$ такая, что для любого $\beta \in \alpha$,

$$f'(\beta) = h'(f' \restriction_\beta).$$

Возьмём

$$f := f' \cap (\alpha \times X).$$

Нетрудно убедиться, что f будет искомой. □

Вариант для класс-функций

Теорема (о трансфинитной «классовой рекурсии»)

Фиксируем некоторый ординал α. *Пусть* $\Phi(x, y)$ *— тотальное функциональное условие. Тогда существует и единственная функция* f *с* $\mathrm{dom}(f) = \alpha$ *такая, что для любого* $\beta \in \alpha$,

$$f(\beta) = [\![\Phi]\!](f\restriction_{\beta}).$$

Доказательство.

Несложная модификация доказательства теоремы о трансфинитной рекурсии (грубо говоря, надо забыть об X и заменить h на $[\![\Phi]\!]$). $\square$

Параметрическую и частичную версии этой теоремы также нетрудно сформулировать и доказать.

Теорема (Цермело о полном упорядочении; ZFC)

Для любого A существует $\leqslant_A$ такое, что $\langle A, \leqslant_A \rangle$ — в.у.м.

Доказательство.

Пусть η — функция выбора на $\mathcal{P}(A) \setminus \{\varnothing\}$. Тогда для каждого ординала α существует и единственная $f_\alpha : \subseteq \alpha \to A$ такая, что:

a. для любого $\beta \in \mathrm{dom}(f_\alpha)$,

$$f_\alpha(\beta) \;=\; \eta(A \setminus \mathrm{range}(f_\alpha \restriction_\beta));$$

b. либо $\mathrm{dom}(f_\alpha) = \alpha$, либо $\mathrm{dom}(f_\alpha) = \gamma$ для нек-ого $\gamma \in \alpha$, причём $\mathrm{range}(f_\alpha \restriction_\gamma) = A$.

Покажем, что найдётся ординал α, для которого $\mathrm{dom}(f_\alpha) \neq \alpha$; тогда мы получим $A \sim \gamma$ для некоторого $\gamma \in \alpha$, а $\langle \gamma, \in_\gamma \rangle$ — в.у.м.

...

Доказательство (продолжение).

Заметим, что для любых ординалов α и β,

$$\begin{matrix} \alpha \in \operatorname{dom}(f_{\alpha+1}), \quad \beta \in \operatorname{dom}(f_{\beta+1}), \\ f_{\alpha+1}(\alpha) = f_{\beta+1}(\beta) \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \beta.$$

Стало быть, условие

$$\Phi(x, y) \;:=\; «y \text{ — ординал}» \wedge x = f_{y+1}(y)$$

функционально. Поэтому, в силу Repl,

$$X \;:=\; \{y \mid \exists x \in A\, \Phi(x, y)\}$$

является множеством. Понятно, что X не может совпадать с классом всех ординалов. Значит, существует ординал α такой, что $f_{\alpha+1}(\alpha)$ не определено, а потому $\operatorname{dom}(f_{\alpha+1}) \neq \alpha + 1$. $\square$

По поводу кардинальных чисел

Из теоремы Цермело и базовых результатов о в.у.м. следует:

Теорема (о сравнимости по мощности; в ZFC)

Для любых X и Y верно $X \preccurlyeq Y$ или $Y \preccurlyeq X$. □

Ординал называют **кардиналом**, или **кардинальным числом**, если он не равномощен никакому меньшему ординалу (т.е. никакому своему элементу). Для обозначения кардиналов используют κ, μ, λ и т.п.

Ясно, что для любых кардиналов κ и μ,

$$\kappa \sim \mu \iff \kappa = \mu.$$

Более того, имеет место следующее.

Предложение

Для любых кардиналов κ и μ,

$$\kappa \preccurlyeq \mu \iff \kappa \leqslant \mu.$$

Доказательство.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Очевидно.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Предположим, что $\kappa \preccurlyeq \mu$. Рассуждая от противного, допустим, что $\kappa \nleqslant \mu$. Тогда $\kappa > \mu$, откуда $\kappa \succcurlyeq \mu$. Ввиду теоремы К.–Ш.–Б., мы получаем $\kappa \sim \mu$, а потому $\kappa = \mu$ — противоречие. $\square$

Теорема (в ZFC)

Для каждого X имеется единственный кардинал, равномощный X.

Доказательство.

Понятно, что X равномощно некоторому ординалу α, ввиду теоремы Цермело и теоремы о связи в.у.м. и ординалов. Определим

$$\operatorname{card}(X) := \bigcap\{\beta \in \alpha + 1 \mid \beta \sim X\}.$$

Таким образом, $\operatorname{card}(X)$ является наименьшим из ординалов, равномощных X. Легко проверить, что он будет искомым кардиналом. □

В дальнейшем $\operatorname{card}(X)$ будет обозначать кардинал, равномощный X; вместо $\operatorname{card}(X)$ часто пишут $|X|$, разумеется.

Предложение (в ZFC)

Для любых X и Y верно следующее:

i. $\operatorname{card}(X) = \operatorname{card}(Y)$ *тогда и только тогда, когда* $X \sim Y$;
ii. $\operatorname{card}(X) \leqslant \operatorname{card}(Y)$ *тогда и только тогда, когда* $X \preccurlyeq Y$. $\square$

Сложение и умножение кардиналов

Для любых кардиналов κ и μ определим

$$\begin{aligned} \kappa + \mu &:= \operatorname{card}(\kappa \times \{0\} \cup \mu \times \{1\}), \\ \kappa \cdot \mu &:= \operatorname{card}(\kappa \times \mu). \end{aligned}$$

Хотя кардиналы представляют собой частные случаи ординалов, $+$ и $\cdot$ на кардиналах определяются не так, как на ординалах. Например,

$$\omega, \quad \omega + 1, \quad \omega + \omega, \quad \omega \cdot \omega$$

являются попарно различными ординалами, однако при этом

$$\aleph_0 = \aleph_0 + 1 = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0.$$

Отметим, что класс всех кардиналов

$$\mathrm{Card} \;:=\; \{\kappa \mid \kappa — \text{кардинал}\}$$

не является множеством. Действительно, в противном случае $\bigcup \mathrm{Card}$ также было бы множеством, но оно, как нетрудно видеть, совпадает с классом всех ординалов *(в качестве простого упражнения)*.

Запись 2^A может иметь разный смысл в зависимости от того, идёт ли речь о множествах в целом, об ординалах или о кардиналах. В случае кардиналов считается, что

$$2^\kappa \; := \; \mathrm{card}\,(\mathcal{P}\,(\kappa)),$$

а не множеству всех функций из κ в 2 (которое, впрочем, имеет ту же мощность). Очевидно, $2^\kappa > \kappa$ для всех кардиналов κ.

Для каждого кардинала κ обозначим

$$\kappa^+ \; := \; \text{наименьший из кардиналов, бóльших } \kappa.$$

Вместо $\aleph_0^+$ пишут $\aleph_1$, вместо $\aleph_1^+$ — $\aleph_2$ и так далее. На самом деле, можно было бы определить $\aleph_\alpha$ для произвольного ординала α.

Континуум-гипотеза — это утверждение о том, что не сущ-ет $X \subseteq \mathbb{R}$ такого, что $\aleph_0 < \operatorname{card}(X) < 2^{\aleph_0}$, т.е.

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1. \tag{CH}$$

Многие, включая Кантора, пытались её доказать.

Континуум-гипотеза — это утверждение о том, что не сущ-ет $X \subseteq \mathbb{R}$ такого, что $\aleph_0 < \mathrm{card}\,(X) < 2^{\aleph_0}$, т.е.

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1. \tag{CH}$$

Многие, включая Кантора, пытались её доказать.

Теорема (Гёдель, 1940)

Можно доказать, что $\neg$CH *нельзя доказать в* ZFC.

Континуум-гипотеза — это утверждение о том, что не сущ-ет $X \subseteq \mathbb{R}$ такого, что $\aleph_0 < \operatorname{card}(X) < 2^{\aleph_0}$, т.е.

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1. \tag{CH}$$

Многие, включая Кантора, пытались её доказать.

Теорема (Гёдель, 1940)

Можно доказать, что $\neg$CH *нельзя доказать в* ZFC. %интересно

Континуум-гипотеза — это утверждение о том, что не сущ-ет $X \subseteq \mathbb{R}$ такого, что $\aleph_0 < \operatorname{card}(X) < 2^{\aleph_0}$, т.е.

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1. \tag{CH}$$

Многие, включая Кантора, пытались её доказать.

Теорема (Гёдель, 1940)

Можно доказать, что $\neg$CH *нельзя доказать в* ZFC. %интересно

Теорема (Коэн, 1963)

Можно доказать, что CH *нельзя доказать в* ZFC.

Континуум-гипотеза — это утверждение о том, что не сущ-ет $X \subseteq \mathbb{R}$ такого, что $\aleph_0 < \operatorname{card}(X) < 2^{\aleph_0}$, т.е.

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1. \qquad \text{(CH)}$$

Многие, включая Кантора, пытались её доказать.

Теорема (Гёдель, 1940)

Можно доказать, что $\neg$CH *нельзя доказать в* ZFC. %интересно

Теорема (Коэн, 1963)

Можно доказать, что CH *нельзя доказать в* ZFC. %ещё интереснее