

# Основные понятия теории множеств: 8/8

Станислав Олегович Сперанский

Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербург 2019

Пусть дано ч.у.м.  $\mathfrak{A} = \langle A, \leq_A \rangle$ . Под **цепью** в  $\mathfrak{A}$  понимается непустое  $S \subseteq A$  такое, что для любых  $a_1, a_2 \in S$ ,

$$a_1 \leq_A a_2 \quad \text{или} \quad a_2 \leq_A a_1.$$

Иными словами, цепи суть непустые подмножества носителя, индуцирующие линейные порядки.

### Теорема (Лемма Цорна; в ZFC)

*Пусть  $\mathfrak{A} = \langle A, \leq_A \rangle$  — ч.у.м. с непустым носителем, в котором у любой цепи имеется верхняя грань. Тогда в  $\mathfrak{A}$  есть максимальный элемент.*

## Доказательство.

Зафиксируем какой-нибудь кардинал  $\kappa$ , который строго больше, чем  $|A|$ . Пусть  $\eta$  — функция выбора для  $\mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$ . Используя трансфинитную рекурсию, определим  $f : \subseteq \kappa \rightarrow A$  по правилу

$$f(\beta) = \eta(\{a \in A \mid a >_A a' \text{ для всех } a' \in \text{range}(f \upharpoonright \beta)\}).$$

Легко видеть, что для любых  $\beta_1, \beta_2 \in \text{dom}(f)$ ,

$$\beta_1 < \beta_2 \implies f(\beta_1) <_A f(\beta_2).$$

...

## Доказательство (окончание).

Из этого мы выводим два следствия.

1.  $f$  инъективна. Стало быть,  $\text{dom}(f) \neq \kappa$ , а потому  $\text{dom}(f) = \alpha$  для некоторого  $\alpha < \kappa$ , причём

$$\{a \in A \mid a >_A a' \text{ для всех } a' \in \text{range}(f)\} = \emptyset.$$

2.  $\text{range}(f)$  является цепью в  $\mathfrak{A}$ . Значит, у  $\text{range}(f)$  есть хотя бы одна верхняя грань в  $\mathfrak{A}$ , которую мы обозначим за  $a_0$ .

Разумеется,  $a_0$  окажется максимальным элементом в  $\mathfrak{A}$  (в противном случае мы бы получили противоречие с (1)). □

## Следствие (в ZFC)

Пусть  $\mathfrak{A} = \langle A, \leq_A \rangle$  — ч.у.м., в котором у любой цепи имеется верхняя грань. Тогда для каждого  $a \in A$  в  $\mathfrak{A}$  есть макс. элемент  $a' \geq_A a$ .

## Доказательство.

Случай, когда  $A = \emptyset$ , тривиален. Поэтому будем считать, что  $A \neq \emptyset$ . Зафиксируем произвольное  $a \in A$ . Возьмём

$$B := \{b \in A \mid a \leq_A b\} \quad \text{и} \quad \leq_B := \leq_A \cap B \times B.$$

Очевидно,  $\mathfrak{B} = \langle B, \leq_B \rangle$  будет ч.у.м., которое удовлетворяет условию леммы Цорна. Стало быть, в  $\mathfrak{B}$  есть максимальный элемент  $a'$ . При этом  $a \leq_A a'$  и, кроме того,  $a'$  окажется максимальным в  $\mathfrak{A}$ .  $\square$

# Немного трансфинитной комбинаторики

## Теорема (в ZFC)

Пусть  $X$  бесконечно. Тогда  $|X \times X| = |X|$ .

## Доказательство.

Рассмотрим

$$M := \left\{ f \mid f : U \xrightarrow[на]{1-1} U \times U, \text{ где } U \subseteq X \text{ и } U \neq \emptyset \right\}.$$

Поскольку  $X$  бесконечно, у него есть счётное подмножество, которое, разумеется, равномощно собственному декартову квадрату. Поэтому  $M \neq \emptyset$ . Определим

$$\leq := \{(f_1, f_2) \in M \times M \mid f_1 \subseteq f_2\}.$$

Очевидно,  $\mathfrak{M} = \langle M, \leq \rangle$  является ч.у.м.

...

## Доказательство (продолжение).

Давайте проверим, что в  $\mathfrak{M}$  у каждой цепи имеется верхняя грань, а значит, к  $\mathfrak{M}$  применима лемма Цорна.

Пусть  $S$  — произвольная цепь в  $\mathfrak{M}$ . Возьмём

$$f_S := \bigcup_{f \in S} f.$$

Легко видеть, что  $f_S$  будет биекцией из  $\text{dom}(f_S)$  на  $\text{range}(f_S)$ , причём

$$\text{dom}(f_S) = \bigcup_{f \in S} \text{dom}(f) \quad \text{и} \quad \text{range}(f_S) = \bigcup_{f \in S} \text{range}(f).$$

...

## Доказательство (ещё продолжение).

Покажем, что  $\text{range}(f_S) = \text{dom}(f_S) \times \text{dom}(f_S)$ . Поскольку  $S$  является цепью в  $\mathfrak{M}$ , имеет место

$$\bigcup_{f_1, f_2 \in S} \text{dom}(f_1) \times \text{dom}(f_2) = \bigcup_{f \in S} \text{dom}(f)^2.$$

(здесь и далее мы часто пишем  $U^2$  вместо  $U \times U$ ; просьба не путать с множеством всех функций из 2 в  $U$ ). Следовательно,

$$\begin{aligned} \text{range}(f_S) &= \bigcup_{f \in S} \text{range}(f) = \bigcup_{f \in S} \text{dom}(f)^2 = \\ &= \bigcup_{f_1, f_2 \in S} \text{dom}(f_1) \times \text{dom}(f_2) = \left( \bigcup_{f \in S} \text{dom}(f) \right)^2 = \text{dom}(f_S)^2. \end{aligned}$$

Стало быть,  $f_S \in M$ . Более того,  $f_S \geq f$  для любого  $f \in S$ . В итоге  $f_S$  оказывается верхней гранью (и даже супремумом) для  $S$  в  $\mathfrak{M}$ .

...

## Доказательство (и ещё продолжение).

По лемме Цорна в  $\mathfrak{M}$  есть максимальный элемент  $f_0$ . Для краткости обозначим  $\text{dom}(f_0)$  через  $Y$ . Гипотетически возможны два случая.

«Хороший случай»: Допустим, что  $|X \setminus Y| \leq |Y|$ . Тогда

$$|Y| \leq |X| = |X \setminus Y \sqcup Y| \leq |\{0, 1\} \times Y| \leq |Y \times Y| = |Y|$$

откуда  $|X| = |Y|$  по теореме К.-Ш.-Б., а потому  $|X \times X| = |X|$ .

«Плохой случай»: Теперь допустим, что  $|Y| < |X \setminus Y|$ . В частности,  $Y$  равномощно некоторому  $Z \subseteq X \setminus Y$ . Очевидно,

$$(Y \sqcup Z)^2 = Y^2 \sqcup (Y \times Z) \sqcup (Z \times Y) \sqcup Z^2,$$

причём  $|Z^2| = |Z \times Y| = |Y \times Z| = |Y^2| = |Y| = |Z|$ .

...

## Доказательство (окончание).

Далее, возьмём

$$V := (Y \times Z) \sqcup (Z \times Y) \sqcup Z^2.$$

Таким образом,  $(Y \sqcup Z)^2 = Y^2 \sqcup V$ . Заметим, что

$$|Z| \leq |V| = |\{0, 1, 2\} \times Z| \leq |Z \times Z| = |Z|,$$

откуда  $|V| = |Z|$  по теореме К.-Ш.-Б. Пусть  $g$  — какая-нибудь биекция из  $Z$  на  $V$ . Определим  $h : (Y \cup Z)^2 \rightarrow (Y \cup Z)^2$  по правилу

$$h(x) := \begin{cases} f_0(x) & \text{если } x \in Y; \\ g(x) & \text{если } x \in Z. \end{cases}$$

Разумеется,  $h$  будет биекцией, т.е.  $h \in M$ . Но  $h > f_0$  — противоречие. Выходит, что «плохой случай» невозможен. □

### Следствие (в ZFC)

Если  $0 < |X| \leq |Y|$  и  $Y$  бесконечно, то  $|X \times Y| = |Y|$ .

### Доказательство.

Ясно, что

$$|Y| \leq |X \times Y| \leq |Y \times Y| = |Y|,$$

откуда  $|X \times Y| = |Y|$  по теореме К.–Ш.–Б. □

Иными словами, если  $X$  и  $Y$  непусты, и хотя бы одно из них бесконечно, то

$$|X \times Y| = \max\{|X|, |Y|\},$$

где  $\max\{\dots\}$  обозначает «максимальный/наибольший эл-т  $\{\dots\}$ ».

## Следствие (в ZFC)

Пусть  $|X| \leq |Y|$  и  $Y$  бесконечно. Тогда  $|X \cup Y| = |Y|$ .

## Доказательство.

Легко видеть, что

$$|Y| \leq |X \cup Y| = |X \setminus Y \sqcup Y| \leq |\{0,1\} \times Y| = |Y|,$$

откуда  $|X \cup Y| = |Y|$  по теореме К.–Ш.–Б. □

Иными словами, если хотя бы одно из  $X$  и  $Y$  бесконечно, то

$$|X \cup Y| = \max\{|X|, |Y|\}.$$

### Следствие (в ZFC)

Пусть  $|X| < |Y|$  и  $Y$  бесконечно. Тогда  $|Y \setminus X| = |Y|$ .

### Доказательство.

В силу предыдущего следствия,

$$\begin{aligned} |Y| = \max\{|X|, |Y|\} &= |X \cup Y| = \\ &= |X \sqcup Y \setminus X| = \max\{|X|, |Y \setminus X|\}. \end{aligned}$$

Поскольку  $|Y| \neq |X|$ , мы получаем  $|Y| = |Y \setminus X|$ . □

## Следствие (в ZFC)

Пусть  $X$  бесконечно. Тогда  $|X^*| = |X|$ .

## Доказательство.

Вспомним, что  $X^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^n$ , где  $X^n$  — множество всех функций из  $n$  в  $X$ . По индукции легко показать, что

$$|X^{n+1}| = |X| \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N}.$$

При этом  $X^0 = \{\emptyset\}$ . Стало быть,

$$|X^*| = |X^* \setminus X^0| = \left| \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^{n+1} \right| = |\mathbb{N} \times X| = |X|$$

(проверка третьего равенства — простое упражнение). □