

Примеры вопросов

1. Что такое *условие* (в теории множеств)? Сформулируйте *схему аксиом выделения*.
2. Сформулируйте *схему аксиом подстановки*. Выведите из неё *схему аксиом выделения*.
3. Что такое *функция*? Сформулируйте *аксиому выбора*.
4. Является ли  $\{x \mid x = x\}$  множеством? (Ответ обосновать.)
5. Докажите, что для любых  $X$  и  $Y$  выражение  $\{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}$  задаёт множество.
6. Какие множества называют *индуктивными*? Докажите, что существует наименьшее по включению индуктивное множество.
7. Докажите, что  $\in_{\mathbb{N}}$  транзитивно.<sup>1</sup>
8. Предполагая известной транзитивность  $\in_{\mathbb{N}}$ , докажите, что  $\in_{\mathbb{N}}$  иррефлексивно.
9. Сформулируйте теорему о рекурсии для  $\mathbb{N}$ ; изложите идею её доказательства.
10. Что такое  $X^*$ ? Сформулируйте теорему о частичной возвратной рекурсии для  $\mathbb{N}$ .
11. Сформулируйте параметризованную теорему о рекурсии для  $\mathbb{N}$ . С её помощью определите сложение и умножение на  $\mathbb{N}$ .
12. Что такое *равномощность* (без использования кардиналов)? Докажите, что  $\mathcal{P}(X)$  равно-мощно  $2^X$  для каждого  $X$ .
13. Сформулируйте и докажите теорему Кантора.
14. Сформулируйте теорему Шрёдера–Бернштейна; изложите идею её доказательства.
15. Какие множества называют *T-конечными*? Докажите, что если множество конечно, то оно T-конечно.
16. Какие множества называют *D-бесконечными*? Докажите, что если множество бесконечно, то оно D-бесконечно.
17. Докажите, что если  $X$  и  $Y$  конечны, причём  $X \cap Y = \emptyset$ , то  $|X \cup Y| = |X| + |Y|$ .
18. Докажите, что у всякого бесконечного множества есть счётное подмножество.
19. Докажите, что если  $X$  и  $Y$  счётны, то  $X \times Y$  счётно.
20. Что такое *ч.у.м*? Какие элементы называются *максимальными*? А *наибольшими*?
21. Определите  $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ , где  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  суть непересекающиеся л.у.м. Покажите, что  $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$  — л.у.м.
22. Определите  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ , где  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  суть л.у.м. Покажите, что  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  — л.у.м.
23. Сформулируйте *принципы минимального элемента и трансфинитной индукции*.
24. Докажите, что если  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  суть непересекающиеся в.у.м., то  $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$  — в.у.м.<sup>2</sup>
25. Докажите, что если  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  суть в.у.м., то  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  — в.у.м.

<sup>1</sup>Здесь  $\mathbb{N}$  — наименьшее по включению индуктивное множество.

<sup>2</sup>Тут не нужно показывать, что  $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$  — л.у.м.

26. Докажите, что никакой собственный начальный сегмент в.у.м. не может быть изоморфен всему в.у.м.
27. Сформулируйте теорему о сравнении в.у.м.; изложите идею её доказательства.
28. Что такое *ординал*?
29. Докажите, что элементы ординалов суть ординалы.
30. Сформулируйте теорему о связи ординалов и в.у.м.; изложите идею её доказательства.
31. Предполагая известным совпадение  $\in$  и  $\subsetneq$  на ординалах, докажите, что во всяком непустом множестве ординалов есть наименьший элемент.
32. Является ли  $\{x \mid x \text{ — ординал}\}$  множеством? (Ответ обосновать.)
33. Определите сложение и умножение на ординалах.
34. Что такое  $X^{<\alpha}$ ? Сформулируйте теорему о трансфинитной рекурсии.
35. Сформулируйте и докажите теорему Цермело.
36. Что такое *кардинал*? Докажите, что кардиналы равноможны только и только тогда, когда они совпадают.
37. Докажите, что для любого  $X$  существует единственный кардинал, равноможный  $X$ .
38. Докажите, что  $X \sim Y$  тогда и только тогда, когда  $\text{card}(X) = \text{card}(Y)$ .
39. Докажите, что  $X \preceq Y$  тогда и только тогда, когда  $\text{card}(X) \leq \text{card}(Y)$ .
40. Определите сложение и умножение на кардиналах.
41. Докажите, что для любого кардинала  $\kappa$  существует наименьший кардинал, больший  $\kappa$ .
42. Является ли  $\{x \mid x \text{ — кардинал}\}$  множеством? (Ответ обосновать.)
43. Сформулируйте лемму Цорна; изложите идею её доказательства.
44. Докажите, что если  $X$  бесконечно, то  $X^*$  равноможно  $X$ .
45. Является ли  $\{x \mid x \text{ конечно}\}$  множеством? (Ответ обосновать.)

.....

17.10.2020