

Основные понятия теории множеств: 1

Станислав Олегович Сперанский

Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербург 2020

Литература:



K. Hrbacek and T. Jech. *Introduction to Set Theory*. 3rd ed., revised and expanded. Marcel Dekker, Inc., 1999.



T. Jech. *Set Theory*. 3rd ed., revised and expanded. Springer, 2002.

.....

Материалы:

<http://users.math-cs.spbu.ru/~speranski/>

%см. Teaching » Basic Notions of Set Theory

Парадокс Рассела связан с неограниченным применением принципа выделения. Однако имеется немало подобных парадоксов, которые вовсе не связаны с понятием множества. Примером является

Парадокс Берри

Пусть n — наименьшее натуральное число, которое нельзя описать менее чем 11 словами. Тогда n описывается 10 словами.

Грубо говоря, ответственность за данный парадокс несёт туманное выражение «нельзя описать». Поэтому, прежде чем приступить к изложению аксиом теории множеств, по всей видимости, нужно пояснить смысл выражения «условие на объекты».

С полужформальной точки зрения **условия** — это специального рода выражения. Самые простые из них, называемые **базовыми**, имеют вид

$$x = y \quad \text{или} \quad x \in y,$$

где x и y суть переменные, играющие роль произвольных множеств. Здесь $x = y$ читается как “ x равно y ”, или “ x совпадает с y ”.

Более сложные условия строятся из базовых с помощью обычных логических связей

“не ...”, “... и ...”, “... или ...”

“если ..., то ...” и “... тогда и только тогда, когда ...”

и кванторов

“для любого x , ...” и “существует x такой, что ...”,

в которых x пробегает произвольные множества. Нередко удобно прибегать к символической записи, обозначая логические связи соответственно через \neg , \wedge , \vee , \rightarrow и \leftrightarrow , а кванторы — $\forall x$ и $\exists x$.

Аксиома экстенциональности

Нередко можно услышать следующее: “Множество определяется своими элементами”. В нашей системе эта идея превращается в аксиому экстенциональности:

$$\forall X \forall Y (\forall u (u \in X \leftrightarrow u \in Y) \rightarrow X = Y). \quad (\text{Ext})$$

Отметим, что «обратное» утверждение, а именно

$$\forall X \forall Y (X = Y \rightarrow \forall u (u \in X \leftrightarrow u \in Y)),$$

выглядит интуитивно очевидным, если понимать равенство двух объектов как их совпадение.

Аксиома пустого множества

Нет ничего проще, чем совокупность без единого элемента, существование которой нам гарантирует **аксиома пустого множества**:

$$\exists X \forall u (u \in X \leftrightarrow u \neq u). \quad (\text{Empty})$$

Разумеется, такое X будет единственно в силу Ext. Его обозначают через \emptyset и называют **ПУСТЫМ МНОЖЕСТВОМ**.

Аксиома пары

Далее, наша система включает ряд аксиом, позволяющих получать новые множества из уже имеющихся. Простейшей из них является, пожалуй, **аксиома пары**:

$$\forall X \forall Y \exists Z \forall u (u \in Z \leftrightarrow (u = X \vee u = Y)). \quad (\text{Pair})$$

Таким образом, если имеются X и Y , то можно получить Z , содержащее в точности X и Y . Полученное Z обозначают через $\{X, Y\}$ и называют **неупорядоченной парой** X и Y .

Схема аксиом выделения

Группы однородных аксиом обычно называют **схемами**. Так, для каждого условия $\Phi(x)$ имеется своя **аксиома выделения**:

$$\forall X \exists Y \forall u (u \in Y \leftrightarrow (u \in X \wedge \Phi(u))). \quad (\text{Sep})$$

По сути, она утверждает, что для всякого X мы можем образовать множество Y всех тех $u \in X$, которые удовлетворяют $\Phi(u)$; такое Y будет обозначаться через $\{u \in X \mid \Phi(u)\}$.

Вместе с тем выражение $\{u \mid \Phi(u)\}$ может и не задавать некоторого множества. Однако в случае, когда предварительно установлено, что $\exists Z \forall u (u \in Z \leftrightarrow \Phi(u))$ (а таких Z не может быть более одного ввиду Ext), мы будем считать его легитимным. Отметим следующее:

- для произвольных X и Y выражения

$$X \cap Y := \{u \mid u \in X \wedge u \in Y\} \quad \text{и} \quad X \setminus Y := \{u \mid u \in X \wedge u \notin Y\}$$

задают множества;

- для произвольного непустого X выражение

$$\bigcap X := \{u \mid u \in v \text{ для всех } v \in X\}$$

задаёт множество.

Аксиома объединения

Соединять множества в одно целое позволяет **аксиома объединения**:

$$\forall X \exists Y \forall u (u \in Y \leftrightarrow \exists v (v \in X \wedge u \in v)). \quad (\text{Union})$$

Стало быть, выражение

$$\bigcup X := \{u \mid u \in v \text{ для некоторого } v \in X\}$$

задаёт множество, которое традиционно называют **объединением** X .
В частности, для произвольных X и Y мы можем определить

$$X \cup Y := \bigcup \{X, Y\} = \{u \mid u \in X \vee u \in Y\},$$

называемое **объединением** X и Y .

Аксиома степени

Для того, чтобы сформулировать нашу следующую аксиому, удобно ввести сокращение

$$x \subseteq y := \forall v (v \in x \rightarrow v \in y).$$

Если $X \subseteq Y$, то говорят, что X является **подмножеством** Y , или Y **включает** X . **Аксиома степени** гласит:

$$\forall X \exists Y \forall u (u \in Y \leftrightarrow u \subseteq X). \quad (\text{Power})$$

Стало быть, выражение

$$\mathcal{P}(X) := \{u \mid u \subseteq X\}$$

задаёт множество, которое называют **множеством-степенью** X .

Аксиома бесконечности

Рассмотрим условие

$$\text{Ind}(x) := \emptyset \in x \wedge \forall u (u \in x \rightarrow u \cup \{u\} \in x).$$

Будем называть X **индуктивным**, если верно $\text{Ind}(X)$. Интуитивно каждое индуктивное множество бесконечно. Поэтому сформулируем **аксиому бесконечности** так:

$$\exists X \text{Ind}(X). \quad (\text{Inf})$$

Значит, Inf гарантирует существование некоторого индуктивного множества.

Схема аксиом подстановки

В нашей системе для каждого условия $\Phi(x, y)$ имеется своя **аксиома подстановки**:

$$\forall x \forall y_1 \forall y_2 ((\Phi(x, y_1) \wedge \Phi(x, y_2)) \rightarrow y_1 = y_2) \rightarrow \\ \forall X \exists Y \forall y (y \in Y \leftrightarrow \exists x (x \in X \wedge \Phi(x, y))). \quad (\text{Repl})$$

Таким образом, в случае, когда $\Phi(x, y)$ удовлетворяет посылке Repl, т.е. в определенном смысле является «функциональным», для произвольного X выражение

$$\{y \mid \exists x (x \in X \wedge \Phi(x, y))\}$$

задаёт множество, своего рода «полный образ X относительно Φ ».

Аксиома регулярности

Значительное влияние на структуру универса всех множеств оказывает аксиома регулярности:

$$\forall X (X \neq \emptyset \rightarrow \exists u (u \in X \wedge X \cap u = \emptyset)). \quad (\text{Reg})$$

(Нет необходимости воспринимать эту аксиому слишком серьезно.)

Под **бинарными** (или **двухместными**) отношениями между X и Y мы будем понимать произвольные подмножества $X \times Y$. В частности, при $X = Y$ мы будем называть их ещё **бинарными** (или же **двухместным**) отношениями на X .

По аналогии можно было бы дать определение трёхместных, четырёхместных и т.д. отношений, однако ключевую роль всё же играют именно двухместные.

Пусть $R \subseteq X \times Y$. Временами мы будем использовать «инфиксную нотацию» и писать xRy вместо $(x, y) \in R$. Множества

$$\text{dom}(R) := \{u \in X \mid \exists v uRv\} \text{ и}$$

$$\text{range}(R) := \{v \in Y \mid \exists u uRv\},$$

называют **областью определения** и **областью значений** R соответственно. Для каждого $U \subseteq X$ множество

$$R[U] := \text{range}(R \cap U \times Y) = \{v \in Y \mid \exists u (u \in U \wedge uRv)\}$$

называется **образом** U относительно R .

Обратное отношение к R определяется как

$$R^{-1} := \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$$

Очевидно, его существование (как множества) гарантирует Sep, ведь для произвольной $(x, y) \in R$ выполнено $(y, x) \in Y \times X$. Если $V \subseteq Y$, то образ V относительно R^{-1} нередко называют **прообразом V относительно R** . Отметим, что

$$\begin{aligned} \text{range}(R) &= \text{dom}(R^{-1}) = R[X], \\ \text{range}(R^{-1}) &= \text{dom}(R) = R^{-1}[Y]. \end{aligned}$$

Бинарные отношения можно естественным образом комбинировать:
для любых $R \subseteq X \times Y$ и $Q \subseteq Y \times Z$ множество

$$R \circ Q := \{(x, z) \in X \times Z \mid \exists y (xRy \wedge yQz)\}$$

называется **композицией R и Q** . Среди бинарных отношений на X особое место занимает

$$\text{id}_X := \{(x, x) \mid x \in X\} = \{(x, y) \in X^2 \mid x = y\},$$

называемое **тождественным отношением на X** .