Основные понятия теории множеств: 2

Станислав Олегович Сперанский

Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербург 2020

Говорят, что $R \subseteq X \times Y$ функционально, если

$$\forall x\, \forall y_1\, \forall y_2\, ((xRy_1 \wedge xRy_2) \to y_1 = y_2).$$

Далее, R называют функцией из X в Y, и пишут $R : X \to Y$, если $\mathrm{dom}\,(R) = X$ и R функционально.

Пусть $f : X \to Y$. Значит, для любого $x \in X$ имеется единственное $y \in Y$ такое, что $(x, y) \in f$, которое называется значением f в x и обозначается через $f\,(x)$. Так, мы получаем

$$\mathrm{range}\,(f) \;=\; \{f\,(x) \mid x \in X\}.$$

Для каждого $U \subseteq X$ ограничение (или сужение) f *на* U определяется как
$$f \restriction_U \;:=\; f \cap U \times Y.$$
Разумеется, $f \restriction_U$ будет функцией из U в Y. Вообще, если $f : X \to Y$ и $g : U \to Y$ таковы, что $U \subseteq X$ и $f \restriction_U = g$, то g называют ограничением f, а f — расширением g. Обозначим
$$Y^X \;:=\; \{f \mid f : X \to Y\}.$$
Под двухместными, трёхместными и т.д. функциями из X в Y понимают элементы Y^{X^2}, Y^{X^3} и т.д.

Функцию f из X в Y называют:

- сюрьективной, или на, если $\operatorname{range}(f) = Y$;
- инъективной, или одно-однозначной, если f^{-1} функционально.
- биективной, если f сюрьективна и инъективна.

Сюрьективные функции также называют сюрьекциями, инъективные — инъекциями, а биективные — биекциями. То, что f является биекцией из X на Y, иногда записывается так:

$$f : X \xrightarrow[\text{на}]{\text{1-1}} Y.$$

Аксиома выбора

Особое место в нашей системе занимает аксиома выбора:

$$\forall X \left(\varnothing \notin X \to \exists f \left(f : X \to \bigcup X \land \forall u \in X \, (f\,(u) \in u) \right) \right). \qquad (C)$$

Несмотря на довольно неоднозначную историю этой аксиомы, ныне она считается стандартной.

Натуральные числа и индукция

Важным следствием Inf является

$$\exists X\,(\mathrm{Ind}\,(X) \wedge \forall Y\,(\mathrm{Ind}\,(Y) \to X \subseteq Y)). \qquad (\mathrm{Nat})$$

Ясно, что Nat гарантирует существование наименьшего по включению индуктивного множества, которое обозначают через $\mathbb{N}$, или $\aleph_0$, или ω. Элементы $\mathbb{N}$ называют натуральными числами, разумеется.

Вывести Nat из Inf можно с помощью Sep. Действительно, зафиксируем какое-нибудь индуктивное множество X_0. Возьмём

$$\mathbb{N} \;:=\; \{x \in X_0 \mid \forall X\,(\mathrm{Ind}\,(X) \to x \in X)\}.$$

По построению $\forall X\,(\mathrm{Ind}\,(X) \to \mathbb{N} \subseteq X)$. Кроме того, легко проверить, что $\mathrm{Ind}\,(\mathbb{N})$.

Определим функцию последователя из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$ как

$$\mathsf{s} \ := \ \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m = n \cup \{n\}\}.$$

Для $n \in \mathbb{N}$ вместо $\mathsf{s}(n)$ нередко пишут $n + 1$. Итак, с неформальной точки зрения $\mathbb{N}$ содержит в точности

$$\begin{aligned} 0 &:= \varnothing, \\ 1 &:= 0 + 1 = \{0\}, \\ 2 &:= 1 + 1 = \{0, 1\}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Под (естественным) порядком на $\mathbb{N}$ мы будем понимать

$$< \ := \ \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 \mid n \in m\}.$$

Разумеется, для всех $n, m \in \mathbb{N}$ верно следующее:

i. $\neg n < 0$;

ii. $n < m + 1 \leftrightarrow (n < m \lor n = m)$.

При выводе более сложных утверждений используется:

Теорема (принцип индукции)

Пусть X удовлетворяет условию

$$0 \in X \land \forall n \in \mathbb{N}\,(n \in X \to n + 1 \in X).$$

Тогда $\forall n \in \mathbb{N}\; n \in X$, т.е. $\mathbb{N} \subseteq X$. □

Замечание: в роли X могут выступать, например, множества вида $\{n \in \mathbb{N} \mid \Phi(n)\}$, а значит, в формулировке теоремы «$n \in X$» можно заменить на «$\Phi(n)$».

Следствие

Для любого $n \in \mathbb{N}$ *верно* $n \subseteq \mathbb{N}$, *т.е.* $n = \{m \in \mathbb{N} \mid m < n\}$.

Доказательство.

Рассмотрим условие

$$\Phi(x) \; := \; x \subseteq \mathbb{N}.$$

Установим по индукции, что $\forall n \in \mathbb{N}\, \Phi(n)$.

База индукции: Разумеется, $0 \subseteq \mathbb{N}$.

Шаг индукции: Предположим, что $n \in \mathbb{N}$ и $n \subseteq \mathbb{N}$. Тогда, очевидно, $n + 1 \subseteq \mathbb{N}$. □

Следствие

Для всех $n, m, k \in \mathbb{N}$ верно следующее:

i. $(m < k \wedge k < n) \to m < n$;

ii. $\neg n < n$. %без применения Reg

Доказательство.

$\boxed{\text{i.}}$ Простая индукция по n.

$\boxed{\text{ii.}}$ Простая индукция по n.

Подробности см. на доске. □

Следствие

Для всех $n, m \in \mathbb{N}$ верно следующее:

i. $0 \leqslant n$;

ii. $m < n \leftrightarrow m + 1 \leqslant n$;

iii. $n < m \vee n = m \vee m < n$.

(При этом в (iii) дизъюнкты взаимно исключают друг друга.)

Доказательство.

$\boxed{\text{i.}}$ Рассмотрим условие

$$\Phi(x) \ := \ 0 \leqslant x.$$

База индукции: Очевидно, $0 \leqslant 0$.

Шаг индукции: Предположим, что $0 \leqslant n$. Тогда $0 < n + 1$, тем более $0 \leqslant n + 1$.

...

Доказательство (продолжение).

ii. Рассмотрим условие

$$\Phi(x) \;:=\; \forall m \in \mathbb{N}\,(m < x \leftrightarrow m+1 \leqslant x).$$

<u>База индукции</u>: Очевидно, $\forall x\,(x \notin \varnothing \wedge x \cup \{x\} \neq \varnothing)$. Поэтому $\Phi(0)$.

<u>Шаг индукции</u>: Предположим, что $\Phi(n)$. Нужно для произвольного $m \in \mathbb{N}$ вывести

$$m < n+1 \;\longleftrightarrow\; m+1 \leqslant n+1.$$

"$\longrightarrow$": Пусть $m < n+1$. Тогда $m < n$ или $m = n$. В первом случае $\Phi(n)$ гарантирует, что $m+1 \leqslant n$, откуда $m+1 < n+1$. Во втором случае мы получаем $m+1 = n+1$.

"$\longleftarrow$": Пусть $m+1 < n+1$ или $m+1 = n+1$. В обоих случаях мы имеем $m < n+1$ (в первом случае это гарантирует транзитивность $<$, а во втором — свойства равенства). ...

Доказательство (продолжение).

iii. Рассмотрим условие

$$\Phi(x) \;:=\; \forall m \in \mathbb{N}\,(m < x \vee m = x \vee x < m).$$

База индукции: Очевидно, $\Phi(0)$ сразу следует из (i).

Шаг индукции: Предположим, что $\Phi(n)$. Нужно для произвольного $m \in \mathbb{N}$ вывести

$$n+1 < m \;\vee\; n+1 = m \;\vee\; m < n+1.$$

Если $m \leqslant n$, то $m < n+1$. Если же $m \nleqslant n$, то $\Phi(n)$ гарантирует, что $n < m$, откуда $n+1 < m$ или $n+1 = m$, в силу (ii). В любом случае имеет место $\Phi(n+1)$. □

Возвратная индукция

Теорема (принцип возвратной индукции)

Пусть X удовлетворяет условию

$$\forall n \in \mathbb{N}\,(\forall m < n\; m \in X \to n \in X).$$

Тогда $\forall n \in \mathbb{N}\; n \in X$, т.е. $\mathbb{N} \subseteq X$.

Доказательство.

Рассмотрим условие

$$\Phi(x) \;:=\; x \subseteq X.$$

<u>База индукции</u>: Очевидно, $\varnothing \subseteq X$.

<u>Шаг индукции</u>: Предположим, что $n \subseteq X$. Согласно условию, $n \subseteq X$ влечёт $n \in X$. Стало быть, $n+1 \subseteq X$.

В итоге мы установили, что $\forall n \in \mathbb{N}\; n \subseteq X$. В частности, для всякого $n \in \mathbb{N}$ имеет место $n+1 \subseteq X$, а потому $n \in X$. $\square$

Для произвольного X обозначим

$$\mathrm{Min}\,(X) \;:=\; \{x \in X \mid \neg\exists u \in X\; u \in x\}.$$

Элементы $\mathrm{Min}\,(X)$ мы будем называть $\in$-минимальными в X.

Теорема (принцип минимального элемента)

Если $X \subseteq \mathbb{N}$ и $X \neq \varnothing$, то $\mathrm{Min}\,(X) \neq \varnothing$.

Доказательство.

Пусть $X \subseteq \mathbb{N}$ и $\mathrm{Min}\,(X) = \varnothing$. Возьмём $Y := \mathbb{N} \setminus X$. Заметим, что

$$\forall n \in \mathbb{N}\,(\forall m < n\; m \in Y \to n \in Y).$$

Действительно, если $\forall m < n\; m \in Y$, что равносильно $\forall m < n\; m \notin X$, то $n \in Y$ (поскольку иначе n окажется $\in$-минимальным в X). Стало быть, $Y = \mathbb{N}$ по принципу возвратной индукции, откуда $X = \varnothing$. □

Корректность простейших рекурсивных определений функций из $\mathbb{N}$ в Y гарантирует:

Теорема (о рекурсии)

Пусть $y_0 \in Y$ и $h : \mathbb{N} \times Y \to Y$. Тогда существует и единственная $f : \mathbb{N} \to Y$ такая, что для любого $n \in \mathbb{N}$,

$$f(n) = \begin{cases} y_0 & \text{если } n = 0, \\ h(m, f(m)) & \text{если } n = m + 1. \end{cases} \qquad (\star)$$

Доказательство.

Пусть $k \in \mathbb{N}$. Будем называть функцию f из $k+1$ в Y правильной, если $(\star)$ верно для всех $n \in k+1$. Рассмотрим

$$S \;:=\; \{k \in \mathbb{N} \mid \text{сущ-ет единственная правильная } f : k+1 \to Y\}.$$

Для каждого $k \in S$ через f_k мы будем обозначать соответствующую (единственную) правильную функцию из $k+1$ в Y.

Давайте установим по индукции, что $S = \mathbb{N}$.

База индукции: Очевидно, $\{(0, y_0)\}$ — это единственная правильная функция из $0+1$ в Y. Стало быть, $0 \in S$.

…

Доказательство (продолжение).

Шаг индукции: Предположим, что $k \in S$. Определим

$$f'_k \ := \ f_k \cup \{(k+1, h(k, f_k(k)))\}.$$

Как можно легко видеть, f'_k — правильная функция из $(k+1)+1$ в Y. Проверим её единственность. Пусть g — правильная функция из $(k+1)+1$ в Y. Тогда:

a. ограничение g на $k+1$ является правильным, а потому совпадает с f_k, т.е. с ограничением f'_k на $k+1$;

b. $g(k+1) = h(k, g(k)) = h(k, f_k(k)) = h(k, f'_k(k)) = f'_k(k+1)$.

Следовательно, g совпадает с f'_k. Таким образом, $k+1 \in S$.

Теперь уже нетрудно убедиться, что

$$f \ := \ \bigcup \{f_k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

является искомой функцией из $\mathbb{N}$ в Y. $\square$

Теорема (о рекурсии, параметризованная)

Пусть $g_0 \in Y^X$ *и* $h : X \times \mathbb{N} \times Y \to Y$. *Тогда существует и единственная* $f : X \times \mathbb{N} \to Y$ *такая, что для любых* $x \in X$ *и* $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x, n) = \begin{cases} g_0(x) & \text{если } n = 0, \\ h(x, m, f(x, m)) & \text{если } n = m + 1. \end{cases}$$

Доказательство.

Это утверждение можно свести к обычной теореме о рекурсии. Для каждой $(n, g) \in \mathbb{N} \times Y^X$ определим $h_{(n,g)} : X \to Y$ по правилу

$$h_{(n,g)}(x) := h(x, n, g(x)).$$

Рассмотрим $h' : \mathbb{N} \times Y^X \to Y^X$, действующую следующим образом:

$$h'(n, g) := h_{(n,g)}.$$

...

Доказательство (продолжение).

По теореме о рекурсии существует единственная $f' : \mathbb{N} \to Y^X$ такая, что для всех $n \in \mathbb{N}$,

$$f'(n) = \begin{cases} g_0 & \text{если } n = 0, \\ h'(m, f'(m)) & \text{если } n = m + 1. \end{cases}$$

В свою очередь, от f' можно перейти к $f : X \times \mathbb{N} \to Y$ по правилу

$$f(x, n) := f'(n)(x).$$

Нетрудно проверить, что f является искомой. $\square$