Основные понятия теории множеств: 3/8

Станислав Олегович Сперанский

Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербург 2020

Теорема (о рекурсии, параметризованная)

Пусть $g_0 \in Y^X$ *и* $h : X \times \mathbb{N} \times Y \to Y$. *Тогда существует и единственная* $f : X \times \mathbb{N} \to Y$ *такая, что для любых* $x \in X$ *и* $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x, n) = \begin{cases} g_0(x) & \text{если } n = 0, \\ h(x, m, f(x, m)) & \text{если } n = m + 1. \end{cases}$$

Доказательство.

Это утверждение можно свести к обычной теореме о рекурсии. Для каждой $(n, g) \in \mathbb{N} \times Y^X$ определим $h_{(n,g)} : X \to Y$ по правилу

$$h_{(n,g)}(x) := h(x, n, g(x)).$$

...

Доказательство (продолжение).

Рассмотрим $h' : \mathbb{N} \times Y^X \to Y^X$, действующую следующим образом:

$$h'(n, g) \;:=\; h_{(n,g)}.$$

По теореме о рекурсии существует единственная $f' : \mathbb{N} \to Y^X$ такая, что для всех $n \in \mathbb{N}$,

$$f'(n) \;=\; \begin{cases} g_0 & \text{если } \; n = 0, \\ h'(m, f'(m)) & \text{если } \; n = m + 1. \end{cases}$$

В свою очередь, от f' можно перейти к $f : X \times \mathbb{N} \to Y$ по правилу

$$f(x, n) \;:=\; f'(n)(x).$$

Нетрудно проверить, что f является искомой. $\square$

Параметризованная теорема о рекурсии позволяет задать, например, сложение на $\mathbb{N}$ следующим образом:

$$\begin{cases} +(k,0) & = \ k, \\ +(k,\mathrm{s}(m)) & = \ \mathrm{s}(+(k,m)). \end{cases}$$

Здесь требуемые функции g_0 и h определяются по правилам

$$g_0(k) \ := \ k \quad \text{и} \quad h(k,m,n) \ := \ \mathrm{s}(n).$$

Разумеется, вместо $+(k,n)$ обычно пишут $k+n$. Очевидно,

$$+(k,1) \ = \ +(k,\mathrm{s}(0)) \ = \ \mathrm{s}(+(k,0)) \ = \ \mathrm{s}(k),$$

а потому данная запись согласуется с ранее введённым нами обозначением $k+1$ для $\mathrm{s}(k)$.

С помощью параметризованной теоремы о рекурсии легко задать и другие арифметические операции на $\mathbb{N}$, такие как умножение и возведение в степень:

$$\begin{cases} k \cdot 0 & = & 0, \\ k \cdot \mathrm{s}(m) & = & (k \cdot m) + k \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} k^0 & = & 1, \\ k^{\mathrm{s}(m)} & = & k^m \cdot k. \end{cases}$$

(В частности, мы считаем $0^0 = 1$.)

По индукции можно установить различные полезные свойства трёх вышеупомянутых операций.

Частично-определённая рекурсия

Бинарное отношение f между X и Y называют частичной функцией из X в Y, и пишут $f : \subseteq X \to Y$, если f функционально.

Теорема (о рекурсии, частичной)

Пусть $y_0 \in Y$ и $h : \subseteq \mathbb{N} \times Y \to Y$. Тогда существует и единственная $f : \subseteq \mathbb{N} \to Y$ такая, что:

a. *для любого $n \in \mathrm{dom}\,(f)$,*

$$f\,(n) = \begin{cases} y_0 & \text{если } n = 0, \\ h\,(m, f\,(m)) & \text{если } n = m + 1; \end{cases}$$

b. *либо $\mathrm{dom}\,(f) = \mathbb{N}$, либо $\mathrm{dom}\,(f) = k + 1$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$, причём $(k, f\,(k)) \notin \mathrm{dom}\,(h)$.*

Доказательство.

Зафиксируем какой-нибудь объект ы $\notin Y$ и положим $Y' := Y \cup \{ы\}$. Теперь расширим h до $h' : \mathbb{N} \times Y' \to Y'$ следующим образом:

$$h'(n, y') := \begin{cases} h(n, y') & \text{если } (n, y') \in \operatorname{dom}(h), \\ ы & \text{иначе.} \end{cases}$$

В силу теоремы о рекурсии, существует и единственная $f' : \mathbb{N} \to Y'$ такая, что для любого $n \in \mathbb{N}$,

$$f'(n) = \begin{cases} y_0 & \text{если } n = 0, \\ h'(m, f'(m)) & \text{если } n = m + 1. \end{cases}$$

Возьмём

$$f := f' \cap (\mathbb{N} \times Y).$$

Нетрудно убедиться, что f будет искомой. $\square$

Больше рекурсии (пока что финитной)

Для произвольного X определим

$$X^* \ := \ \{f \mid \exists n \in \mathbb{N} \, (f : n \to X)\}.$$

Элементы X^* называют конечными последовательностями эл-ов X.

Теорема (о возвратной рекурсии)

Пусть $h : Y^* \to Y$. Тогда существует единственная $f : \mathbb{N} \to Y$ такая, что для любого $n \in \mathbb{N}$,

$$f(n) \ = \ h(f\restriction_n).$$

Доказательство.

По аналогии с доказательством теоремы о рекурсии. [...] □

Напоследок приведём версию для класс-функции. Условие $\Phi(x, y)$ называется функциональным, если

$$\forall x \, \forall y_1 \, \forall y_2 \, ((\Phi(x, y_1) \wedge \Phi(x, y_2)) \to y_1 = y_2).$$

Пусть $\Phi(x, y)$ функционально и u удовлетворяет $\exists y \, \Phi(u, y)$. Тогда за $[\![\Phi]\!](u)$ мы будем обозначать то самое единственное y, которое удовлетворяет $\Phi(u, y)$. Наконец, в случае, когда $\forall x \, \exists y \, \Phi(x, y)$, мы будем говорить, что Φ тотально.

Теорема (о возвратной «классовой рекурсии»)

Пусть $\Phi(x, y)$ — *тотальное функциональное условие. Тогда сущ–ет и единственная функция* f *с* $\operatorname{dom}(f) = \mathbb{N}$ *такая, что для любого* $n \in \mathbb{N}$,

$$f(n) \;=\; [\![\Phi]\!](f\restriction_n).$$

Доказательство.

Идея здесь примерно та же, хотя деталей побольше. В нашем модуле эта теорема не будет играть особой роли, однако именно «классовая рекурсия» является базовым инструментом в ТМ. [...] □

Параметрические и частичные версии теорем о возвратной рекурсии также можно сформулировать и доказать.

Равномощность

Говорят, что X и Y равномощны, и пишут $X \sim Y$, если существует биекция из X на Y.

Теорема

Для всех X, Y и Z верно следующее:

a. $X \sim X$;

b. *если* $X \sim Y$, *то* $Y \sim X$;

c. *если* $X \sim Y$ *и* $Y \sim Z$, *то* $X \sim Z$. □

Рассмотрим один полезный пример. Пусть нас интересуют только подмножества X. Тогда для $Y \subseteq X$ под его характеристической функцией понимают $\chi_Y : X \to 2$, действующую по правилу

$$\chi_Y(x) := \begin{cases} 1 & \text{если } x \in Y, \\ 0 & \text{если } x \in X \setminus Y. \end{cases}$$

Легко проверить, что функция, отображающая каждое $Y \in \mathcal{P}(X)$ в χ_Y, является биекцией из $\mathcal{P}(X)$ на 2^X. Стало быть,

$$2^X \sim \mathcal{P}(X).$$

Более того, в литературе иногда пишут 2^X вместо $\mathcal{P}(X)$, хотя эти множества вовсе не равны.

Говорят, что X по мощности меньше или равно Y, и пишут $X \preccurlyeq Y$, если существует инъекция из X в Y. Очевидно,

$$X \preccurlyeq Y \quad \Longleftrightarrow \quad X \sim Z \ \text{ для некоторого } \ Z \subseteq Y.$$

Запись $X \prec Y$ является сокращением для условия $X \preccurlyeq Y \wedge X \not\sim Y$. Безусловно, если X равномощно некоторому собственному подмножеству Y, то $X \preccurlyeq Y$, но $X \prec Y$ при этом может не иметь места.

Теорема

Для всех X, Y и Z верно следующее:

a. *если* $X \preccurlyeq Y$ *и* $X \sim Z$, *то* $Z \preccurlyeq Y$;
b. *если* $X \preccurlyeq Y$ *и* $Y \sim Z$, *то* $X \preccurlyeq Z$;
c. $X \preccurlyeq X$;
d. *если* $X \preccurlyeq Y$ *и* $Y \preccurlyeq Z$, *то* $X \preccurlyeq Z$. □

В частности, для любого X верно $X \preccurlyeq \mathcal{P}(X)$, поскольку функция f из X в $\mathcal{P}(X)$, действующая по правилу

$$f(x) := \{x\},$$

очевидно, является инъекцией.

Теорема (Кантора, обобщённая)

Для любого X верно $X \prec \mathcal{P}(X)$.

Доказательство.

Рассуждая от противного, давайте предположим, что X и $\mathcal{P}(X)$ равномощны. Пусть $f : X \xrightarrow[\text{на}]{\text{1-1}} \mathcal{P}(X)$. Рассмотрим

$$Y := \{x \in X \mid x \notin f(x)\}.$$

Поскольку $Y \in \mathcal{P}(X)$, то найдётся (и единственный, хотя это совсем не важно) $x \in X$ такой, что $f(x) = Y$. В итоге мы получаем

$$x \in Y \iff x \notin f(x) \iff x \notin Y$$

(по построению Y и ввиду выбора x). Противоречие. $\square$

На самом деле, можно построить условие $\mathrm{Card}\,(x)$ со следующими свойствами:

a. $\forall X\, \exists!\, Y\, (\mathrm{Card}\,(Y) \wedge X \sim Y)$, при этом соответствующее Y обозначают $\mathrm{card}\,(X)$, или $|X|$, и называют кардинальным числом X, или кардиналом X, или мощностью X;

b. $\forall X\, \forall Y\, (\mathrm{Card}\,(X) \wedge \mathrm{Card}\,(Y) \wedge X \sim Y \to X = Y)$.

Соответственно можно корректно определить $|X| \leqslant |Y|$ как $X \preccurlyeq Y$. В результате $\leqslant$ будет своего рода «предпорядком» на классе всех кардинальных чисел. Покажем, что это «частичный порядок»:

Теорема (Кантора–Шрёдера–Бернштейна)

Если $X \preccurlyeq Y$ и $Y \preccurlyeq X$, то $X \sim Y$.

Доказательство.

Пусть $f : X \xrightarrow{1\text{-}1} Y$ и $g : Y \xrightarrow{1\text{-}1} X$. Заметим, что

$$X \supseteq g[Y] \supseteq g[f[X]] \quad \text{и} \quad X \sim g[f[X]].$$

Стало быть, мы получаем $X \sim g[Y]$, в силу леммы ниже. Вместе с тем $g[Y] \sim Y$, а потому $X \sim Y$. □

Лемма

Если $X \supseteq Y \supseteq X'$ и $X \sim X'$, то $X \sim Y \sim X'$.

Доказательство.

Пусть $f : X \xrightarrow[\text{на}]{1\text{-}1} X'$. Определим по рекурсии последовательности

$$X_0,\ X_1,\ X_2,\ \ldots \quad \text{и} \quad Y_0,\ Y_1,\ Y_2,\ \ldots$$

подмножеств X следующим образом:

$$X_n := \begin{cases} X & \text{если } n = 0, \\ f[X_m] & \text{если } n = m+1 \end{cases} \quad \text{и}$$

$$Y_n := \begin{cases} Y & \text{если } n = 0, \\ f[Y_m] & \text{если } n = m+1. \end{cases}$$

...

Доказательство (продолжение).

По условию $X_0 \supseteq Y_0 \supseteq X_1$. Отсюда легко получить по индукции, что для любого $n \in \mathbb{N}$ верно $X_n \supseteq Y_n \supseteq X_{n+1}$. Значит,

$$X_0 \supseteq Y_0 \supseteq X_1 \supseteq Y_1 \supseteq X_2 \supseteq Y_2 \supseteq \ldots$$

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим

$$U_n := X_n \setminus Y_n.$$

Далее, обозначим

$$U := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n \quad \text{и} \quad Z := X \setminus U.$$

...

Доказательство (ещё чуть-чуть осталось).

Таким образом,

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n \cup Z \quad \text{и} \quad Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_{n+1} \cup Z.$$

Нетрудно понять, что $f[U_n] = U_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, а потому $f[U] = U \setminus U_0$. Наконец, определим $g : X \to Y$ по правилу

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & \text{если } x \in U, \\ x & \text{если } x \in Z. \end{cases}$$

Поскольку $g \restriction_U$ и $g \restriction_Z$ суть инъекции, причём

$$\operatorname{range}(g \restriction_U) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_{n+1} \quad \text{и} \quad \operatorname{range}(g \restriction_Z) = Z,$$

то g является биекцией из X на Y. Стало быть, $X \sim Y \sim X'$. □