# Основные понятия теории множеств: 4/8


Станислав Олегович Сперанский

Санкт-Петербургский государственный университет



Санкт-Петербург 2020

# Конечные множества

Говорят, что $X$ имеет $n$ элементов (или $X$ имеет мощность $n$), где $n \in \mathbb{N}$, если $X \sim n$. Далее, $X$ называют конечным, если $X \sim n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, и бесконечным в противном случае.

В силу принципа Дирихле, для любых $\{n, m\} \subseteq \mathbb{N}$, если $n \sim m$, то $n = m$. В дальнейшем мы будем предполагать, что

$$(\forall n \in \mathbb{N})\, \mathrm{Card}\,(n).$$

Иными словами, натуральные числа суть кардиналы. В частности, для $n \in \mathbb{N}$ верно $|n| = n$, а $X \sim n$ можно переписать как $|X| = n$.

Из принципа Дирихле также следует, что $\mathbb{N}$ бесконечно. Кроме того, для любых $\{m, n\} \subseteq \mathbb{N}$,

$$m \leqslant n \quad \Longleftrightarrow \quad m \preccurlyeq n.$$

Поэтому введённый нами ранее порядок на натуральных числах совпадёт с порядком на мощностях конечных множеств.

**Предложение**

*Пусть $X$ бесконечно. Тогда $|X| > n$ для всех $n \in \mathbb{N}$.*

## Доказательство.

Рассмотрим условие

$$\Phi(x) \;:=\; x \preccurlyeq X.$$

База индукции: Очевидно, $0 \preccurlyeq X$.

Шаг индукции: Предположим, что $n \preccurlyeq X$, т.е. существует инъекция $f$ из $n$ в $X$. Поскольку $X$ бесконечно, $\operatorname{range}(f) \neq X$. Выберем какое-нибудь $x_n \in X \setminus \operatorname{range}(f)$ и возьмём

$$g \;:=\; f \cup \{(n, x_n)\}.$$

Ясно, что $g : n+1 \xrightarrow{\text{1-1}} X$. Стало быть, $n+1 \preccurlyeq X$.

Итак, для любого $n \in \mathbb{N}$ мы имеем $n \prec n+1 \preccurlyeq X$, откуда $n \prec X$. $\square$

### Предложение

*Пусть $X$ конечно и $|Y| \leqslant |X|$. Тогда $Y$ конечно.*

### Доказательство.

Поскольку $X$ конечно, то $|X| = n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Разумеется, $Y$ должно быть конечным, поскольку иначе $n = |X| \geqslant |Y| > n$. $\square$

### «Сложное доказательство».

Не ограничивая общности, можно считать, что $X = n$ и $Y \subseteq X$, где $n \in \mathbb{N}$. Используя рекурсию, определим $f : \subseteq \mathbb{N} \to Y$ по правилу

$$f(k) \;:=\; \text{«минимальный элемент в } Y \setminus \operatorname{range}(f \restriction_k)\text{»}.$$

Нетрудно понять, что $f : \subseteq \mathbb{N} \xrightarrow[\text{на}]{\text{1-1}} Y$, причём $\operatorname{dom}(f) = m$ для некоторого $m \leqslant n$. $\square$

## Предложение

*Пусть* $f : X \xrightarrow{\text{на}} Y$*, причём* $X$ *конечно. Тогда* $|Y| \leqslant |X|$.

## Доказательство.

Не ограничивая общности, мы можем считать, что $X = n$, где $n \in \mathbb{N}$. Определим $g : Y \to n$ по правилу

$$g(y) \;:=\; \text{«минимальный элемент в } f^{-1}[\{y\}]\text{»}.$$

Легко понять, что $g : Y \xrightarrow{1\text{-}1} n$. Стало быть, $|Y| \leqslant |n| = n$. $\square$

**Предложение**

*Пусть $X$ и $Y$ конечны, причём $X \cap Y = \varnothing$. Тогда $X \cup Y$ конечно и*

$$|X \cup Y| \;=\; |X| + |Y|.$$

**Доказательство.**

Индукция по $|Y|$.

База индукции: Очевидно, если $|Y| = 0$, то $Y = \varnothing$, а потому

$$|X \cup Y| \;=\; |X| \;=\; |X| + 0 \;=\; |X| + |Y|.$$

...

## Доказательство (продолжение).

Шаг индукции: Пусть $|Y| = n+1$, т.е. существует биекция $f$ из $n+1$ на $Y$. Возьмём

$$y := f(n) \quad \text{и} \quad Z := Y \setminus \{y\}.$$

Очевидно, $|Z| = n$. Тогда

$$\begin{aligned} |X \cup Y| &= |(X \cup Z) \cup \{y\}| \\ &= |X \cup Z| + 1 \\ &= (|X| + |Z|) + 1 \\ &= |X| + (|Z| + 1) \\ &= |X| + |Y|. \end{aligned}$$

$\square$

### Предложение

*Пусть $X$ и $Y$ конечны. Тогда $X \times Y$ и $X^Y$ конечны, причём*

$$|X \times Y| = |X| \cdot |Y| \quad \text{и} \quad |X^Y| = |X|^{|Y|}.$$

### Доказательство.

В качестве упражнения. $\square$

# Про $\aleph_0$

Давайте называть $X$ счётным, если $|X| = |\mathbb{N}|$. Говорят, что $X$ более чем счётно, если $|X| > |\mathbb{N}|$, и не более чем счётно, если $|X| \leqslant |\mathbb{N}|$.

# Про $\aleph_0$

Давайте называть $X$ счётным, если $|X| = |\mathbb{N}|$. Говорят, что $X$ более чем счётно, если $|X| > |\mathbb{N}|$, и не более чем счётно, если $|X| \leqslant |\mathbb{N}|$.

— Но...

# Про $\aleph_0$

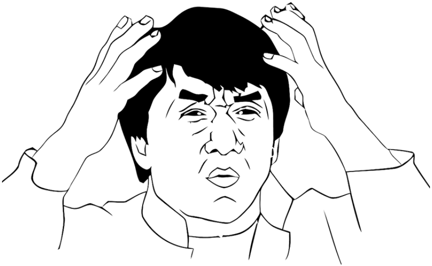
Давайте называть $X$ счётным, если $|X| = |\mathbb{N}|$. Говорят, что $X$ более чем счётно, если $|X| > |\mathbb{N}|$, и не более чем счётно, если $|X| \leqslant |\mathbb{N}|$.

— Но... должно же быть $|X| \not> |\mathbb{N}|$ !...

# Про $\aleph_0$

Давайте называть $X$ счётным, если $|X| = |\mathbb{N}|$. Говорят, что $X$ более чем счётно, если $|X| > |\mathbb{N}|$, и не более чем счётно, если $|X| \leqslant |\mathbb{N}|$.

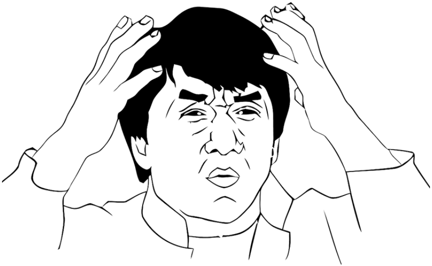
— Но... должно же быть $|X| \not> |\mathbb{N}|$ !...



# Про $\aleph_0$

Давайте называть $X$ счётным, если $|X| = |\mathbb{N}|$. Говорят, что $X$ более чем счётно, если $|X| > |\mathbb{N}|$, и не более чем счётно, если $|X| \leqslant |\mathbb{N}|$.

— Но... должно же быть $|X| \ngtr |\mathbb{N}|$ !...



**Предложение (в ZFC)**

*Пусть $X$ бесконечно. Тогда у $X$ есть счётное подмножество.*

**Доказательство.**

Пусть $\eta$ — какая-нибудь функция выбора для $\mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$. Используя рекурсию, определим $f : \mathbb{N} \to X$ по правилу

$$f(k) := \eta(X \setminus \operatorname{range}(f \restriction_k)).$$

Как легко видеть, $f : \mathbb{N} \xrightarrow{1\text{-}1} X$. Поэтому $\operatorname{range}(f)$ будет счётным подмножеством $X$. □

В дальнейшем мы будем предполагать, что

$$\mathrm{Card}(\mathbb{N}).$$

Иными словами, $\mathbb{N}$ является кардиналом. Таким образом, $|\mathbb{N}| = \mathbb{N}$. Когда речь идёт о кардиналах, вместо $\mathbb{N}$ часто пишут $\aleph_0$.

**Следствие (в ZFC)**

$|X| > \aleph_0$ *тогда и только тогда, когда* $X$ *бесконечно и несчётно.* $\square$

**Предложение**

$|X| \leqslant \aleph_0$ *тогда и только тогда, когда* $X$ *конечно или счётно.*

### Доказательство.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Тривиально.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Не ограничивая общности, здесь можно считать, что $X \subseteq \mathbb{N}$. Предположим, что $X$ бесконечно. Используя рекурсию, определим $f : \mathbb{N} \to X$ по правилу

$$f(k) \; := \; \text{«минимальный элемент в } X \setminus \operatorname{range}(f \restriction_k)\text{»}.$$

Нетрудно проверить, что $f : \mathbb{N} \xrightarrow[\text{на}]{\text{1-1}} X$. $\square$

### Следствие (в ZFC)

$|X| \not> \aleph_0$ *тогда и только тогда, когда* $|X| \leqslant \aleph_0$. $\square$

## Предложение

*Пусть $f : X \xrightarrow{\text{на}} Y$, причём $X$ не более чем счётно. Тогда $Y$ не более чем счётно.*

## Доказательство.

Не ограничивая общности, будем считать, что $X \subseteq \mathbb{N}$. Определим $g : Y \to X$ по правилу

$$g(y) := \text{«минимальный элемент в } f^{-1}[\{y\}]\text{»}.$$

Легко понять, что $g : Y \xrightarrow{1\text{-}1} X$. Стало быть, $|Y| \leqslant |X| \leqslant \aleph_0$. $\square$

В частности, мы получаем полезный критерий:

**Следствие**

*Непустое $X$ не более чем счётно тогда и только тогда, когда существует сюрьекция из $\mathbb{N}$ на $X$.*

**Доказательство.**

В качестве простого упражнения. □

Ещё одно полезное наблюдение:

**Следствие**

*Пусть $R$ — отношение эквивалентности на $X$, причём $X$ не более чем счётно. Тогда $X_{/R}$ не более чем счётно.* □

**Предложение**

*Пусть $X$ и $Y$ не более чем счётны. Тогда $X \times Y$ не более чем счётно.*

**Доказательство.**

Не ограничивая общности, мы можем считать, что $X, Y \subseteq \mathbb{N}$. Стало быть, нужно установить счётность $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Определим $\nu : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ по правилу

$$\nu(n, m) := 2^n \cdot (2m + 1) - 1.$$

Нетрудно проверить, что $\nu$ биективна. □

Теперь уже легко доказать счётность $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, ...

**Следствие**

*Пусть $X$ и $Y$ не более чем счётны. Тогда $X \cup Y$ не более чем счётно.*

**Доказательство.**

Поскольку $X$ и $Y \setminus X$ равномощны некоторым подмножествам соответственно $\mathbb{N} \times \{0\}$ и $\mathbb{N} \times \{1\}$, то $X \cup (Y \setminus X) = X \cup Y$ равномощно подмножеству $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, а потому не более чем счётно. $\square$

**Следствие**

*Пусть $X$ конечно, причём его элементы не более чем счётны. Тогда $\bigcup X$ не более чем счётно.*

**Доказательство.**

Простая индукция по $|X|$. $\square$

Рассмотрим условие «быть (бесконечной) последовательностью»:

$$\mathrm{Seq}\,(F) \;:=\; \exists Y\, F : \mathbb{N} \to Y.$$

Если $\mathrm{Seq}\,(F)$ и $n \in \mathbb{N}$, то вместо $F\,(n)$ нередко пишут $F_n$.

**Теорема**

*Пусть $F$ — это последовательность последовательностей, т.е. $\mathrm{Seq}\,(F)$ и $(\forall x \in \mathbb{N})\,\mathrm{Seq}\,(F_n)$. Тогда $\bigcup\{\mathrm{range}\,(F_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ не более чем счётно.*

**Доказательство.**

Определим $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup\{\mathrm{range}\,(F_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ по правилу

$$g\,(n, m) \;:=\; F_n\,(m).$$

Легко понять, что $g$ сюрьективна. $\square$

## Следствие (в ZFC)

*Пусть $X$ не более чем счётно, и все элементы $X$ также не более чем счётны. Тогда $\bigcup X$ не более чем счётно.*

## Доказательство.

Не умаляя общности, мы будем считать, что $X \neq \varnothing$ и $\varnothing \notin X$. Пусть $g$ — сюрьекция из $\mathbb{N}$ на $X$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим

$$S_n \; := \; \left\{ f \mid f : \mathbb{N} \xrightarrow{\text{на}} g(n) \right\}.$$

Очевидно, $S_n \neq \varnothing$ для всякого $n \in \mathbb{N}$. Обозначим $\{S_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ через $\mathscr{S}$. Пусть $\eta$ — какая-нибудь функция выбора для $\mathscr{S}$. Наконец, определим $F : \mathbb{N} \to \bigcup \mathscr{S}$ по правилу

$$F(n) \; := \; \eta(S_n)$$

Ясно, что $\bigcup \{\operatorname{range}(F_n) \mid n \in \mathbb{N}\} = \bigcup \{g(n) \mid n \in \mathbb{N}\} = \bigcup X$. □

**Теорема**

*Пусть $X$ не более чем счётно и непусто. Тогда $X^*$ счётно.*

**Доказательство.**

Зафиксируем $g : \mathbb{N} \xrightarrow{\text{на}} X$. Очевидно, $f \circ g \in X^*$ для всякого $f \in \mathbb{N}^*$. Определим $G : \mathbb{N}^* \to X^*$ по правилу

$$G(f) := f \circ g.$$

Легко убедиться, что $G$ сюрьективна. Поэтому достаточно показать, что $\mathbb{N}^*$ счётно и $X^*$ бесконечно.

...

## Доказательство (продолжение).

Пусть $\nu : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow[\text{на}]{\text{1-1}} \mathbb{N}$. Разумеется, можно построить $\mathrm{left} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и $\mathrm{right} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такие, что для любых $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{left}\,(\nu\,(n, m)) \; = \; n \quad \text{и} \quad \mathrm{right}\,(\nu\,(n, m)) \; = \; m.$$

Используя рекурсию, можно определить последовательность последовательностей $f$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$\begin{aligned} f_0\,(i) &= \varnothing \\ f_{n+1}\,(i) &= f_n\,(\mathrm{left}\,(i)) \cup \{(n, \mathrm{right}\,(i))\}. \end{aligned}$$

Далее, нетрудно доказать по индукции, что для каждого $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{range}\,(f_n) \; = \; \{g \mid g : n \to \mathbb{N}\}.$$

Стало быть, $\bigcup \{\mathrm{range}\,(f_n) \mid n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}^*$. Поэтому $\mathbb{N}^*$ счётно.

. . .

## Доказательство (последние штрихи).

Осталось проверить, что $X^*$ бесконечно. Для этого выберем какой-нибудь $x_0 \in X$ и определим $h : \mathbb{N} \to X^*$ по правилу

$$h(n) \;:=\; n \times \{x_0\},$$

т.е. $h(n)$ — это последовательность длины $n$ из $x_0$-ов. Очевидно, $h$ инъективна, а потому $X^*$ не может быть конечным. $\square$

Для произвольного $X$ обозначим

$$\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X) \;:=\; \{Y \mid Y \subseteq X \text{ и } Y \text{ конечно}\}.$$

Отметим, что в теореме Кантора нельзя заменить $\mathcal{P}$ на $\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}$:

**Следствие**

*Пусть $X$ счётно. Тогда $\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X)$ счётно.*

**Доказательство.**

Рассмотрим $h : X^* \to \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X)$, действующую по правилу

$$h(f) \;:=\; \mathrm{range}(f).$$

Легко видеть, что $h$ сюрьективна. □

### Теорема (в ZFC)

*Пусть $X$ бесконечно, а $Y$ не более чем счётно. Тогда $|X \cup Y| = |X|$.*

### Доказательство.

Не ограничивая общности, можно считать, что $X \cap Y = \varnothing$. При этом у $X$ имеется некое счётное подмножество $Z$. Ясно, что $Y \cup Z$ счётно. Пусть $f : Y \cup Z \xrightarrow[\text{на}]{\text{1-1}} Z$. Определим $g : X \cup Y \to X$ по правилу

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & \text{если } x \in Y \cup Z, \\ x & \text{если } x \in X \setminus Z. \end{cases}$$

Легко понять, что $g$ биективна. □

**Следствие (в ZFC)**

*Пусть $X$ более чем сч., а $Y$ не более чем сч. Тогда $|X \setminus Y| = |X|$.*

**Доказательство.**

Возьмём $U := X \cap Y$ и $V := X \setminus U$. Ясно, что $U$ не более чем счётно, а $V$ бесконечно. Значит, $|X| = |V \cup U| = |V| = |X \setminus Y|$. □