Основные понятия теории множеств: 5/8

Станислав Олегович Сперанский

Санкт-Петербургский государственный университет

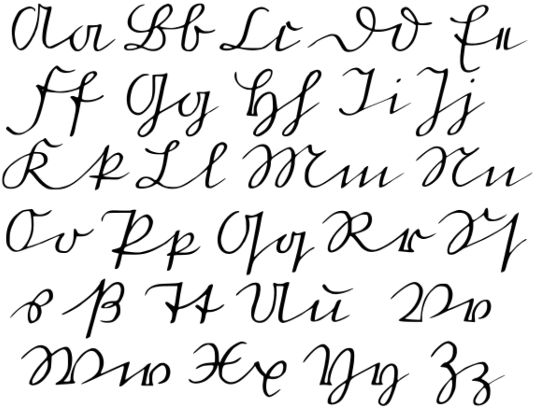
Санкт-Петербург 2020

Ч.у.м. и л.у.м.

Под частично упорядоченным множеством, или ч.у.м., понимается упорядоченная пара вида $\langle A, \leqslant \rangle$, где $\leqslant$ — частичный порядок на A; в случае, когда $\leqslant$ линейно, $\langle A, \leqslant \rangle$ называется линейно упорядоченным множеством, или л.у.м.

Вообще, (непустые) множества с заданными на них отношениями и функциями называются структурами. В роли метапеременных для структур выступают готические прописные буквы: $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, ...

♡ Немецкая рукопись ♡



Пусть даны ч.у.м. $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant \rangle$ и $S \subseteq A$. Говорят, что $a \in A$ является:

- максимальным в S в $\mathfrak{A}$, если $a \in S$ и $\neg(\exists x \in S)\, a < x$;
- минимальным в S в $\mathfrak{A}$, если $a \in S$ и $\neg(\exists x \in S)\, x < a$;
- наибольшим в S в $\mathfrak{A}$, если $a \in S$ и $(\forall x \in S)\, x \leqslant a$;
- наименьшим в S в $\mathfrak{A}$, если $a \in S$ и $(\forall x \in S)\, a \leqslant x$.

Кроме того, a называют:

- верхней гранью S в $\mathfrak{A}$, если $(\forall x \in S)\, x \leqslant a$;
- нижней гранью S в $\mathfrak{A}$, если $(\forall x \in S)\, a \leqslant x$;
- супремумом S в $\mathfrak{A}$, если a — наим. верхняя грань S в $\mathfrak{A}$;
- инфимумом для S в $\mathfrak{A}$, если a — наиб. нижняя грань S в $\mathfrak{A}$.

Когда ясно, о каком $\mathfrak{A}$ идёт речь, уточнение «в $\mathfrak{A}$» часто опускают.

Предложение

Пусть $\mathfrak{A}$ — ч.у.м. Тогда:

i. *существует не более одного наибольшего в A элемента;*
ii. *всякий наибольший в A элемент является максимальным в A;*
iii. *любые два различных максимальных в A элемента несравнимы.*

Аналогично для наименьших и минимальных элементов. □

Предложение

Пусть $\mathfrak{A}$ — л.у.м. Тогда всякий максимальный в A элемент является наибольшим в A (и наоборот). Аналогично для минимальных и наименьших элементов. □

Изоморфизмы между ч.у.м.

Пусть даны ч.у.м. $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant_A \rangle$ и $\mathfrak{B} = \langle B, \leqslant_B \rangle$. Будем говорить, что функция f из A в B сохраняет порядок, или является гомоморфизмом из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$, если для любых $a_1, a_2 \in A$

$$a_1 \leqslant_A a_2 \quad \Longrightarrow \quad f(a_1) \leqslant_B f(a_2). \tag{$*$}$$

Композиция гомоморфизмов снова является гомоморфизмом, как легко видеть. Инъективный гомоморфизм f из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$ называется вложением $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$, если $(*)$ усиливается до эквивалентности.

Предложение

Пусть даны л.у.м. $\mathfrak{A}$ и ч.у.м. $\mathfrak{B}$. Тогда всякий инъективный гомоморфизм из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$ является вложением $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$. $\square$

Под изоморфизмом из $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$ понимается сюръективное вложение $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$. Говорят, что $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ изоморфны, и пишут $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$, если существует изоморфизм из $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$.

Предложение

Для всех ч.у.м. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$:

a. $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{A}$;

b. *если* $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$, *то* $\mathfrak{B} \simeq \mathfrak{A}$;

c. *если* $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$ *и* $\mathfrak{B} \simeq \mathfrak{C}$, *то* $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{C}$. □

Изоморфизмы из $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}$ называют автоморфизмами $\mathfrak{A}$. Их можно воспринимать как своего рода симметрии.

Базовые преобразования над ч.у.м.

I. Пусть даны ч.у.м. $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant \rangle$ и $S \subseteq A$. Возьмём

$$\leqslant_S \;:=\; \leqslant \cap\, S \times S.$$

Тогда $\langle S, \leqslant_S \rangle$ — ч.у.м., которое называют индуцированным в $\mathfrak{A}$ по S. При этом из л.у.м. всегда получится л.у.м.

II. Пусть даны ч.у.м. $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant_A \rangle$ и $\mathfrak{B} = \langle B, \leqslant_B \rangle$, причём A и B не пересекаются. Возьмём

$$\leqslant \;:=\; \leqslant_A \cup \leqslant_B \cup\, A \times B.$$

Тогда $\langle A \cup B, \leqslant \rangle$ — ч.у.м., которое будет обозначаться $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$. При этом из двух л.у.м. всегда получится л.у.м.

III. Пусть даны ч.у.м. $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant_A \rangle$ и $\mathfrak{B} = \langle B, \leqslant_B \rangle$. Определим $\leqslant$ на $A \times B$ по правилу

$$\langle a_1, b_1 \rangle \leqslant \langle a_2, b_2 \rangle \quad :\Longleftrightarrow \quad a_1 \leqslant_A a_2 \text{ и } b_1 \leqslant_B b_2.$$

Тогда $\langle A \times B, \leqslant \rangle$ — ч.у.м., где $\leqslant$ традиционно называют покоординатным порядком. Разумеется, даже в случае, когда $\leqslant_A$ и $\leqslant_B$ были линейными, $\leqslant$ может оказаться нелинейным.

IV. Модифицируем предыдущую конструкцию, сделав одну из координат главной. Например, вторую:

$$\langle a_1, b_1 \rangle \leqslant \langle a_2, b_2 \rangle \quad :\Longleftrightarrow$$
$$b_1 <_B b_2 \text{ или } (b_1 = b_2 \text{ и } a_1 \leqslant_A a_2).$$

Тогда $\langle A \times B, \leqslant \rangle$ — ч.у.м., которое мы будем обозначать $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$. При этом из двух л.у.м. всегда получится л.у.м.

Трансфинитная индукция и фундированность

Говорят, что для ч.у.м. $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant \rangle$ верен принцип трансфинитной индукции, если для всякого $X \subseteq A$,

$$(\forall x \in A)\,((\forall y < x)\, y \in X \to x \in X) \quad \longrightarrow \quad X = A.$$

Кроме того, будем говорить, что для $\mathfrak{A}$ верен принцип минимального элемента, если для любого $X \subseteq A$,

$$X \neq \varnothing \quad \longrightarrow \quad (\exists x \in X)\, \neg(\exists y \in X)\, y < x;$$

такого рода ч.у.м. называют фундированными.

Теорема

Для ч.у.м. $\mathfrak{A}$ верен принцип трансфинитной индукции тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ фундировано.

Доказательство (путём переписывания).

Пусть $X \subseteq A$. Обозначим $A \setminus X$ через $\overline{X}$. Тогда

$$
\begin{aligned}
(\forall x \in A)\,((\forall y < x)\, y \in X \to x \in X) \to X = A &\iff \\
X \neq A \to \neg(\forall x \in A)\,((\forall y < x)\, y \in X \to x \in X) &\iff \\
X \neq A \to (\exists x \in A)\,\neg\,((\forall y < x)\, y \in X \to x \in X) &\iff \\
X \neq A \to (\exists x \in A)\,((\forall y < x)\, y \in X \wedge x \notin X) &\iff \\
X \neq A \to (\exists x \in A)\,(\neg(\exists y \notin X)\, y < x \wedge x \notin X) &\iff \\
X \neq A \to (\exists x \in A)\,\left(\neg\left(\exists y \in \overline{X}\right) y < x \wedge x \notin X\right) &\iff \\
\overline{X} \neq \varnothing \to \left(\exists x \in \overline{X}\right) \neg\left(\exists y \in \overline{X}\right) y < x. &
\end{aligned}
$$

При этом $\{X \mid X \subseteq A\}$ совпадает с $\left\{\overline{X} \mid X \subseteq A\right\}$, разумеется. □

Нетрудно проверить следующее.

I. Пусть даны фундированные ч.у.м. $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, причём $A \cap B = \varnothing$. Тогда $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$ будет фундированным ч.у.м.

II. Пусть даны фундированные ч.у.м. $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. Тогда $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ будет фундированным ч.у.м.

На самом деле, операции $\oplus$ и $\otimes$ тесным образом связаны со сложением и умножением ординалов, о которых пойдёт речь позже.

Фундированные л.у.м. ещё называют вполне упорядоченными множествами, или в.у.м., а соответствующие им (линейные) порядки — полными порядками. В частности, все ординалы будут в.у.м.

Некоторые результаты о в.у.м.

Пусть дано в.у.м. $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant \rangle$. Мы будем называть $S \subseteq A$ начальным сегментом $\mathfrak{A}$, если для любых $a_1, a_2 \in A$,

$$a_1 \leqslant a_2 \quad \text{и} \quad a_2 \in S \quad \Longrightarrow \quad a_1 \in S.$$

В частности, легко видеть, что для каждого $a \in A$ множество

$$[0, a)_{\mathfrak{A}} := \{x \in A \mid x < a\}$$

является начальным сегментом $\mathfrak{A}$. Когда ясно, о каком $\mathfrak{A}$ идёт речь, нижний индекс $\cdot_{\mathfrak{A}}$ обычно опускается.

Предложение

Пусть $\mathfrak{A}$ — в.у.м., а S — начальный сегмент $\mathfrak{A}$, отличный от A. Тогда существует единственный $a \in A$ такой, что $S = [0, a)$. $\square$

Обозначим через $\mathrm{IS}_{\mathfrak{A}}$ множество всех начальных сегментов в.у.м. $\mathfrak{A}$, отличных от A, и определим

$$\subseteq_{\mathrm{IS}_{\mathfrak{A}}} \ := \ \{(U, V) \in \mathrm{IS}_{\mathfrak{A}} \times \mathrm{IS}_{\mathfrak{A}} \mid U \subseteq V\}.$$

Разумеется, $\subseteq_{\mathrm{IS}_{\mathfrak{A}}}$ является частичным порядком на $\mathrm{IS}_{\mathfrak{A}}$. Более того:

Предложение

Для каждого в.у.м. $\mathfrak{A}$ *верно* $\mathfrak{A} \simeq \langle \mathrm{IS}_{\mathfrak{A}}, \subseteq_{\mathrm{IS}_{\mathfrak{A}}} \rangle$.

Доказательство.

Рассмотрим $f : A \to \mathrm{IS}_{\mathfrak{A}}$, действующую по правилу

$$f(a) \ := \ [0, a).$$

Нетрудно проверить, что она будет нужным изоморфизмом. $\square$

Предложение

Пусть $\mathfrak{A}$ — в.у.м., а f — вложение из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}$ (или «строго возрастающая функция из A в A»). Тогда $f(a) \geqslant a$ для всех $a \in A$.

Доказательство.

Рассмотрим

$$X := \{a \in A \mid f(a) \ngeqslant a\}.$$

Предположим, что $X \neq \varnothing$. Тогда в X есть минимальный элемент x. Ясно, что $f(x) < x$; поэтому $f(f(x)) < f(x)$, т.е. $f(x) \in X$. Однако $f(x) < x$ — противоречие. $\square$

Следствие

Для каждого в.у.м. $\mathfrak{A}$ единственным автоморфизмом $\mathfrak{A}$ является id_A.

Доказательство.

Пусть f — автоморфизм $\mathfrak{A}$. Очевидно, f^{-1} также будет автоморфизмом $\mathfrak{A}$. Поэтому для каждого $a \in A$ верно $a = f^{-1}(f(a)) \geqslant f(a) \geqslant a$, откуда $f(a) = a$. $\square$

Следствие

Для любых в.у.м. $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ имеется не более одного изом-ма из $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$.

Доказательство.

Пусть f и g — изоморфизмы из $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$. Разумеется, $f \circ g^{-1}$ — автоморфизм $\mathfrak{A}$. Стало быть, $f \circ g^{-1} = \mathrm{id}_A$, а потому $f = g$. $\square$

Порой удобно (хотя и не совсем правильно) отождествлять начальные сегменты данного в.у.м. $\mathfrak{A}$ с теми в.у.м., которые эти сегменты индуцируют в $\mathfrak{A}$. Это не должно приводить к путанице.

Лемма

Никакой собств. нач. сегмент в.у.м. $\mathfrak{A}$ не может быть изоморфен $\mathfrak{A}$.

Доказательство.

Пусть f — изоморфизм из $\mathfrak{A}$ на некоторый собственный начальный сегмент $\mathfrak{A}$. Тогда $\mathrm{range}\,(f) = [0, a)$ для подходящего $a \in A$. Поэтому $f\,(a) < a$, что противоречит предложению выше. $\square$

Теорема (о сравнении в.у.м.)

Для любых в.у.м. $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ имеет место ровно один из трёх случаев:

i. *$\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ изоморфны;*

ii. *$\mathfrak{A}$ изоморфно собственному начальному сегменту $\mathfrak{B}$;*

iii. *$\mathfrak{B}$ изоморфно собственному начальному сегменту $\mathfrak{A}$.*

При этом в (ii–iii) соответствующие собственные начальные сегменты определяются однозначно.

Доказательство.

Единственность сегментов в (ii–iii), а также то, что (i–iii) взаимно исключают друг друга, нетрудно вывести из леммы выше.

...

Доказательство (продолжение).

Теперь покажем, что один из трёх случаев обязан иметь место. Для этого рассмотрим

$$\xi \;:=\; \{(a,b)\in A\times B \mid [0,a)_{\mathfrak{A}} \text{ и } [0,b)_{\mathfrak{B}} \text{ изоморфны}\}.$$

Используя лемму выше, нетрудно показать, что ξ и ξ^{-1} будут функциональны. Понятно, что изоморфизмы в.у.м. переводят начальные сегменты в начальные сегменты. В частности:

- если f является изоморфизмом из $[0,a)_{\mathfrak{A}}$ на $[0,b)_{\mathfrak{B}}$, и $a' <_A a$, то $f\restriction_{[0,a')}$ будет изоморфизмом из $[0,a')_{\mathfrak{A}}$ на $[0,f(a'))_{\mathfrak{B}}$;
- если f является изоморфизмом из $[0,b)_{\mathfrak{B}}$ на $[0,a)_{\mathfrak{A}}$, и $b' <_B b$, то $f\restriction_{[0,b')}$ будет изоморфизмом из $[0,b')_{\mathfrak{B}}$ на $[0,f(b'))_{\mathfrak{A}}$.

...

Доказательство (окончание).

Значит, $\mathrm{dom}\,(\xi)$ и $\mathrm{range}\,(\xi)$ окажутся начальными сегментами $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ соответственно, и для любых $a_1, a_2 \in \mathrm{dom}\,(\xi)$,

$$a_1 \ <_A \ a_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \xi\,(a_1) \ <_B \ \xi\,(a_2).$$

Стало быть, ξ является изоморфизмом из $\mathrm{dom}\,(\xi)$ на $\mathrm{range}\,(\xi)$. Если $\mathrm{dom}\,(\xi) \neq A$ и $\mathrm{range}\,(\xi) \neq B$, то найдутся $a \in A$ и $b \in B$ такие, что

$$\mathrm{dom}\,(\xi) \ = \ [0, a) \quad \text{и} \quad \mathrm{range}\,(\xi) \ = \ [0, b);$$

однако тогда $(a, b) \in \xi$ — противоречие. Следовательно, $\mathrm{dom}\,(\xi) = A$ или $\mathrm{range}\,(\xi) = B$, откуда получается нужный результат. $\square$