Основные понятия теории множеств: 6/8

Станислав Олегович Сперанский

Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербург 2020

Ординальные числа

Будем называть X транзитивным, если $\bigcup X \subseteq X$, что равносильно $X \subseteq \mathcal{P}(X)$. Для произвольного X определим

$$\in_X \; := \; \{(u, v) \in X \times X \mid u \in v\}.$$

Мы будем говорить, что X является ординалом, или ординальным числом, если X транзитивно и $\in_X$ — строгий полный порядок на X. Для обозначения ординалов используют α, β, γ и их производные. При этом вместо $\alpha \in \beta$ нередко пишут $\alpha < \beta$.

Замечание: среди ординальных чисел есть все элементы $\mathbb{N}$ и само $\mathbb{N}$; когда речь идет об ординалах, вместо $\mathbb{N}$ часто пишут ω.

Предложение

Пусть α — ординал, $X \in \alpha$. Тогда X — ординал.

Доказательство.

Проверим транзитивность X: если $u \in v$ и $v \in X$, то $\{u, v\} \subseteq \alpha$ ввиду транзитивности α, а потому $u \in X$, в силу транзитивности $\in_\alpha$. Кроме того, $X \subseteq \alpha$. Поэтому $\in_X$ — строгий полный порядок на X. □

Таким образом, каждый ординал α равен множеству всех ординалов, которые меньше α. Также стоит отметить следующее.

Предложение

Пусть α — ординал и $\beta \in \alpha$. Тогда $\beta = [0, \beta)$. □

Альтернативное определение $<$ на классе всех ординалов даёт:

Предложение

Для любых ординалов α и β,

$$\alpha \in \beta \iff \alpha \subsetneq \beta.$$

Доказательство.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Предположим, что $\alpha \in \beta$. Тогда $\alpha \subseteq \beta$. Если $\alpha = \beta$, то $\beta \in_\beta \beta$ — противоречие. Значит, $\alpha \neq \beta$.

...

Доказательство (продолжение).

$\Longleftarrow$ Предположим, что $\alpha \subsetneq \beta$. Возьмём

$$\gamma \; := \; \text{«наименьший элемент } \beta \setminus \alpha \text{ в } \langle \beta, \in_\beta \rangle\text{»}.$$

Нетрудно убедиться, что α совпадает с $\{x \in \beta \mid x < \gamma\}$:

- если $x \in \alpha$, то $\gamma \nleq x$ (так как иначе $\gamma \in \alpha$), а потому $x < \gamma$;
- если $x \in \beta$ и $x < \gamma$, то $x \notin \beta \setminus \alpha$, т.е. $x \in \alpha$.

Таким образом, $\alpha = \gamma$. $\square$

Далее, используя эти результаты, можно доказать, что $<$ ведёт себя подобно строгому полному порядку на классе всех ординалов:

Теорема

Для всех ординалов α, β и γ:

a. $\alpha \not< \alpha$;

b. *если* $\alpha < \beta$ *и* $\beta < \gamma$, *то* $\alpha < \gamma$;

c. *либо* $\alpha < \beta$, *либо* $\alpha = \beta$, *либо* $\beta < \alpha$;

Более того, для любого непустого множества ординалов X:

d. $\bigcap X \in X$, *причём* $\bigcap X$ — *наименьший элемент* X *в* $\langle X, \in_X \rangle$.

Доказательство.

$\boxed{\text{a}}$ Если $\alpha < \alpha$, то $\alpha \in_\alpha \alpha$ — противоречие. Значит, $\alpha \not< \alpha$.

$\boxed{\text{b}}$ Немедленно следует из транзитивности γ.

$\boxed{\text{d}}$ Легко видеть, что $\bigcap X$ будет ординалом. При этом для каждого $\alpha \in X$ верно $\bigcap X \subseteq \alpha$, т.е. $\bigcap X \leqslant \alpha$. Если $\bigcap X \notin X$, то $\bigcap X < \alpha$ для всех $\alpha \in X$, откуда $\bigcap X \in \bigcap X$ — противоречие. Значит, $\bigcap X \in X$.

$\boxed{\text{c}}$ В силу (d), в $\{\alpha, \beta\}$ есть наименьший элемент. Стало быть, α и β сравнимы по $\leqslant$, т.е. $\alpha \leqslant \beta$ или $\beta < \alpha$. □

Пусть X — множество ординалов. Очевидно, транзитивность X равносильна тому, что для любых ординалов α и β,

$$\alpha < \beta \text{ и } \beta \in X \implies \alpha \in X,$$

а потому мы можем воспринимать транзитивное X как «начальный сегмент» в классе всех ординалов относительно $<$.

Следствие

Пусть X — транзитивное множество ординалов. Тогда X — ординал.

Доказательство.

Ясно, что $\in_X$ — полный порядок на X (в силу теоремы выше). □

Теорема

Пусть X — множество ординалов. Тогда $\bigcup X$ — ординал, причём $\bigcup X$ является «супремумом X» в классе всех ординалов относительно $\in$.

Доказательство.

Ясно, что $\bigcup X$ — это множество ординалов. Также легко понять, что $\bigcup X$ транзитивно. Поэтому $\bigcup X$ — ординал.

Разумеется, $\bigcup X$ является «супремумом X» в классе всех множеств относительно $\subsetneq$, тем более в классе всех ординалов; при этом на ординалах $\subsetneq$ совпадает с $\in$. $\square$

Стоит отметить, что для каждого ординала α множество

$$\alpha + 1 \ := \ \alpha \cup \{\alpha\}$$

является ординалом; при этом $\alpha \subsetneq \alpha + 1$ и не существует X такого, что $\alpha \subsetneq X \subsetneq \alpha + 1$. Ненулевой ординал α называется непредельным, если $\alpha = \beta + 1$ для некоторого ординала β, и предельным в противном случае. Как легко видеть, для любых ординалов α и β,

$$\alpha \ = \ \beta \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha + 1 \ = \ \beta + 1.$$

Значит, у всякого непредельного ординала α имеется единственный «предшественник», которого можно обозначить через $\alpha - 1$.

В дальнейшем мы будем считать, что 0 также является предельным. Нетрудно проверить, что для любого ординала α,

$$\bigcup \alpha \;=\; \begin{cases} \alpha - 1 & \text{если } \alpha \text{ непредельный} \\ \alpha & \text{если } \alpha \text{ предельный.} \end{cases}$$

При этом ω оказывается наим. ненулевым предельным ординалом, а натуральные числа суть в точности ординалы, которые меньше ω.

Используя «классовую рекурсию», можно добраться и до некоторых бóльших ординалов. К примеру:

$$\omega \qquad \omega + 1 \qquad \omega + 1 + 1 \qquad \ldots \qquad \omega + \omega,$$

где $\omega + \omega$ обозначает $\bigcup \{\omega, \omega + 1, \omega + 1 + 1, \ldots\}$.

Напрягая воображение, шагаем по ординалам

$\omega+\omega$	$\omega+\omega+\omega$	$\omega+\omega+\omega+\omega$	$\ldots$	$\omega\cdot\omega$
эх	раз	да ещё раз	да ещё много раз	

Напрягая воображение, шагаем по ординалам

$\omega+\omega$	$\omega+\omega+\omega$	$\omega+\omega+\omega+\omega$	$\ldots$	$\omega\cdot\omega$
эх	раз	да ещё раз	да ещё много раз	
$\omega\cdot\omega$	$\omega\cdot\omega\cdot\omega$	$\omega\cdot\omega\cdot\omega\cdot\omega$	$\ldots$	ω^ω
эх	раз	да ещё раз	да ещё много раз	

Напрягая воображение, шагаем по ординалам

$\omega+\omega$	$\omega+\omega+\omega$	$\omega+\omega+\omega+\omega$	$\ldots$	$\omega\cdot\omega$
эх	раз	да ещё раз	да ещё много раз	
$\omega\cdot\omega$	$\omega\cdot\omega\cdot\omega$	$\omega\cdot\omega\cdot\omega\cdot\omega$	$\ldots$	ω^ω
эх	раз	да ещё раз	да ещё много раз	

Напрягая воображение, шагаем по ординалам

$\omega+\omega$	$\omega+\omega+\omega$	$\omega+\omega+\omega+\omega$	$\ldots$	$\omega\cdot\omega$
эх	раз	да ещё раз	да ещё много раз	
$\omega\cdot\omega$	$\omega\cdot\omega\cdot\omega$	$\omega\cdot\omega\cdot\omega\cdot\omega$	$\ldots$	ω^ω
эх	раз	да ещё раз	да ещё много раз	

ω^{ω}	$\omega^{\omega^{\omega}}$	$\omega^{\omega^{\omega^{\omega}}}$	$\ldots$	ε_0
эх	раз	да ещё раз	да ещё много раз	

Ординалы как типы в.у.м.

Ясно, что для любых ординалов α и β,

$$\langle \alpha, \in_\alpha \rangle \simeq \langle \beta, \in_\beta \rangle \iff \alpha = \beta.$$

Более того, имеет место:

Теорема (о связи ординалов и в.у.м.)

Пусть $\mathfrak{A}$ — строгий в.у.м. Тогда существует единственный ординал α такой, что $\mathfrak{A}$ изоморфно $\langle \alpha, \in_\alpha \rangle$.

Доказательство.

См. следующую лекцию. □