Основные понятия теории множеств: 7/8

Станислав Олегович Сперанский

Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербург 2020

Ясно, что для любых ординалов α и β,

$$\langle\alpha, \in_\alpha\rangle \simeq \langle\beta, \in_\beta\rangle \iff \alpha = \beta.$$

Более того, имеет место:

Теорема (о связи ординалов и в.у.м.)

Пусть $\mathfrak{A}$ — строгий в.у.м. Тогда существует единственный ординал α такой, что $\mathfrak{A}$ изоморфно $\langle\alpha, \in_\alpha\rangle$.

Доказательство.

Единственность мы уже отметили.

...

Доказательство (продолжение).

Докажем существование подходящего α. Для этого рассмотрим

$$S \;:=\; \left\{ a \in A \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{существует ординал } \alpha_a \text{ такой, что} \\ [0, a)_{\mathfrak{A}} \text{ и } \alpha_a \text{ изоморфны как в.у.м.} \end{array} \right\}.$$

Разумеется, для каждого $a \in S$ соответствующий ординал α_a определяется однозначно. Поэтому, применив Repl, можно образовать

$$X \;:=\; \{\alpha_a \mid a \in S\}.$$

Как известно, изоморфизмы в.у.м. переводят начальные сегменты в начальные сегменты. Стало быть, S окажется начальным сегментом $\mathfrak{A}$, а X — «начальным сегментом» в классе всех ординалов (относительно $\in$). Следовательно, X — ординал.

...

Доказательство (окончание).

Теперь определим $f : S \to X$ по правилу

$$f(a) := \alpha_a.$$

Нетрудно видеть, что f окажется изоморфизмом. Предположим, что $A \setminus S \neq \varnothing$, а значит, $S = [0, a)$, где a — наименьший элемент в $A \setminus S$. Но тогда $a \in S$ — противоречие. Стало быть, $S = A$. $\square$

Сложение и умножение ординалов

Если $\mathfrak{A}$ — в.у.м., то $\mathrm{ord}\,(\mathfrak{A})$ будет обозначать ординал α такой, что $\mathfrak{A}$ изоморфно $\langle \alpha, \in_\alpha \rangle$. Для любых ординалов α и β определим

$$\alpha + \beta \;:=\; \mathrm{ord}\,(\langle \alpha, \in_\alpha \rangle \oplus \langle \beta, \in_\beta \rangle), \qquad \text{Error!}$$

$$\alpha \cdot \beta \;:=\; \mathrm{ord}\,(\langle \alpha, \in_\alpha \rangle \otimes \langle \beta, \in_\beta \rangle). \qquad \checkmark$$

Очевидно, при данной интерпретации $\alpha + 1$ совпадает с $\alpha \cup \{\alpha\}$, т.е. расхождения с введённым ранее обозначением не возникает.

Замечание: на самом деле, класс-операции сложения и умножения на ординалах обычно определяют, используя подходящее обобщение теоремы о рекурсии, однако в результате получится то же самое.

Одно полезное наблюдение

Отметим, что класс всех ординалов

$$\mathrm{Ord} := \{\alpha \mid \alpha \text{ — ординал}\}$$

не является множеством. Действительно, в противном случае Ord оказался бы ординалом, и мы получили бы $\mathrm{Ord} \in \mathrm{Ord}$.

Трансфинитная рекурсия

Для любых множества X и ординала α обозначим

$$\begin{aligned} X^{<\alpha} &:= \{f \mid (\exists \beta < \alpha)\, f : \beta \to X\} \\ &= \bigcup \{X^{\beta} \mid \beta < \alpha\}. \end{aligned}$$

Вообще, если $f : \beta \to X$, где β — ординал, то f называют β-посл-тью элементов X, или трансфинитной последовательностью элементов X длины β; поэтому $X^{<\alpha}$ — это просто множество всех трансфинитных последовательностей элементов X длины меньше α.

Теорема (о трансфинитной рекурсии)

Фиксируем некоторый ординал α*. Пусть* $h : X^{<\alpha} \to X$*. Тогда существует единственная* $f : \alpha \to X$ *такая, что для любого* $\beta \in \alpha$*,*

$$f(\beta) \;=\; h(f\restriction_\beta). \qquad (\star)$$

Доказательство.

Пусть $\gamma \in \alpha$. Мы будем называть функцию f из $\gamma + 1$ в X чудесной, если $(\star)$ верно для всех $\beta \in \gamma + 1$. Рассмотрим

$$S \;:=\; \{\gamma \in \alpha \mid \text{сущ-ет единственная чудесная } f : \gamma + 1 \to X\}.$$

Для каждого $\gamma \in S$ через f_γ мы будем обозначать соответствующую (единственную) чудесную функцию из $\gamma + 1$ в X.

...

Доказательство (продолжение).

Заметим, что для любых $\gamma, \gamma' \in S$,

$$\gamma \leqslant \gamma' \implies f_\gamma \subseteq f_{\gamma'}.$$

Действительно, пусть $\{\gamma, \gamma'\} \subseteq S$ и $\gamma \leqslant \gamma'$; тогда ограничение $f_{\gamma'}$ на $\gamma + 1$, очевидно, является чудесным, а потому совпадает с f_γ.

Установим по трансфинитной индукции, что $S = \alpha$.

Пусть $\gamma \in \alpha$. Предположим, что для каждого $\beta < \gamma$ имеется единственная чудесная функция f_β из $\beta + 1$ в X. Возьмём

$$R := \bigcup \{f_\beta \mid \beta < \gamma\}.$$

...

Доказательство (продолжение).

Легко видеть, что R — функция из γ в X, причём для всякого $\beta < \gamma$ ограничение R на $\beta + 1$ совпадает с f_β. Далее, возьмём

$$g \ := \ R \cup \{(\gamma, h(R))\}.$$

Разумеется, g будет чудесной функцией из $\gamma + 1$ в X. Осталось лишь установить её единственность. Пусть g' — чудесная функция из $\gamma + 1$ в X. Проверим, что $g(\beta) = g'(\beta)$ для всех $\beta \in \gamma + 1$.

- Если $\beta \in \gamma$, то $\beta + 1 \subseteq \gamma$ и ограничение g' на $\beta + 1$, будучи чудесным, совпадает с f_β, т.е. с ограничением g на $\beta + 1$, а потому $g'(\beta) = g(\beta)$. В итоге $g\restriction_\gamma = g'\restriction_\gamma$.
- Более того, $g'(\gamma) = h(g'\restriction_\gamma) = h(g\restriction_\gamma) = g(\gamma)$.

Таким образом, $g = g'$. Поэтому $\gamma \in S$ и $f_\gamma = g$.

...

Доказательство (окончание).

В силу принципа трансфинитной индукции, $S = \alpha$. Определим

$$f := \bigcup \{f_\gamma \mid \gamma \in \alpha\}.$$

Нетрудно убедиться, что f окажется нужной функцией из α в X. $\square$

Теорему о трансфинитной рекурсии можно параметризовать, но это нужно главным образом для ординальной арифметики и комбинаторики, которыми мы пока заниматься не собираемся.

Частично-определённая трансфинитная рекурсия

Теорема (о трансфинитной рекурсии, частичной)

Фиксируем некоторый ординал α. Пусть $h :\subseteq X^{<\alpha} \to X$. Тогда сущ. единственная $f :\subseteq \alpha \to X$ такая, что:

a. *для любого* $\beta \in \mathrm{dom}\,(f)$,
$$f(\beta) = h(f\restriction_\beta);$$

b. *либо* $\mathrm{dom}\,(f) = \alpha$, *либо* $\mathrm{dom}\,(f) = \gamma$ *для некоторого* $\gamma < \alpha$, *причём* $f \notin \mathrm{dom}\,(h)$.

Доказательство.

Зафиксируем какой-нибудь объект ы $\notin X$ и положим $X' := X \cup \{ы\}$. Теперь расширим h до $h' : (X')^{<\alpha} \to X'$ следующим образом:

$$h'(g') := \begin{cases} h(g') & \text{если } g' \in \operatorname{dom}(h), \\ ы & \text{иначе.} \end{cases}$$

В силу теоремы о трансфинитной рекурсии, найдётся единственная $f' : \alpha \to X'$ такая, что для любого $\beta \in \alpha$,

$$f'(\beta) = h'(f' \restriction_\beta).$$

Возьмём

$$f := f' \cap (\alpha \times X).$$

Нетрудно убедиться, что f будет искомой частичной функцией. □

Теорема (о трансфинитной «классовой рекурсии»)

Фиксируем некоторый ординал α. Пусть $\Phi(x, y)$ — тотальное функциональное условие. Тогда существует и единственная функция f с $\mathrm{dom}(f) = \alpha$ *такая, что для любого $\beta \in \alpha$,*

$$f(\beta) = [\![\Phi]\!](f\restriction_\beta).$$

Доказательство.

Несложная модификация доказательства теоремы о трансфинитной рекурсии (грубо говоря, надо забыть об X и заменить h на $[\![\Phi]\!]$). □

Параметрическую и частичную версии этой теоремы также нетрудно сформулировать и доказать.

Теорема (Цермело о полном упорядочении; ZFC)

Для любого A существует $\leqslant$ такое, что $\langle A, \leqslant\rangle$ — в.у.м.

Доказательство.

Пусть η — функция выбора на $\mathcal{P}(A) \setminus \{\varnothing\}$. Тогда для каждого ординала α существует единственная $f_\alpha : \subseteq \alpha \to A$ такая, что:

a. для любого $\beta \in \mathrm{dom}(f_\alpha)$,

$$f_\alpha(\beta) = \eta(A \setminus \mathrm{range}(f_\alpha \restriction_\beta));$$

b. либо $\mathrm{dom}(f_\alpha) = \alpha$, либо $\mathrm{dom}(f_\alpha) = \gamma$ для нек-ого $\gamma \in \alpha$, причём $\mathrm{range}(f_\alpha) = A$.

Очевидно, каждая f_α инъективна. Более того, при помощи f_α можно без труда построить полный порядок на $\mathrm{range}(f_\alpha)$.

...

Доказательство (продолжение).

Предположим, что $\mathrm{dom}\,(f_\alpha) = \alpha$ для всех ординалов α. Рассмотрим

$$\Phi\,(x, y) \;:=\; «y \text{ — ординал»} \wedge x = f_{y+1}\,(y).$$

Ясно, что если $\alpha \leqslant \beta$, то $f_\alpha \subseteq f_\beta$. Поэтому для любых α и β,

$$f_{\alpha+1}\,(\alpha) \;=\; f_{\beta+1}\,(\beta) \quad\Longrightarrow\quad \alpha \;=\; \beta.$$

Значит, $\Phi\,(x, y)$ функционально, т.е.

$$\forall x\, \forall y_1\, \forall y_2\, (\Phi\,(x, y_1) \wedge \Phi\,(x, y_2) \to y_1 = y_2).$$

Поэтому, применяя Repl, мы можем образовать

$$X \;:=\; \{y \mid (\exists x \in A)\, \Phi\,(x, y)\}.$$

Однако X должно совпадать с Ord — противоречие. Итак, найдётся ординал α такой, что $\mathrm{dom}\,(f_\alpha) \neq \alpha$, т.е. $\mathrm{range}\,(f_\alpha) = A$. □

Из теоремы Цермело и теоремы о сравнении в.у.м. следует:

Теорема (о сравнимости по мощности; в ZFC)

Для любых X и Y верно $X \preccurlyeq Y$ или $Y \prec X$. □

Ординал называют кардиналом, или кардинальным числом, если он не равномощен никакому меньшему ординалу (т.е. никакому своему элементу). Для обозначения кардиналов используют κ, μ, λ и т.п.

Очевидно, для любых кардиналов κ и μ,

$$\kappa \sim \mu \iff \kappa = \mu.$$

Более того, имеет место следующее.

Предложение

Для любых кардиналов κ и μ,

$$\kappa \preccurlyeq \mu \iff \kappa \leqslant \mu.$$

Доказательство.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Очевидно.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Предположим, что $\kappa \preccurlyeq \mu$. Рассуждая от противного, допустим, что $\kappa \nleqslant \mu$. Тогда $\kappa > \mu$, откуда $\kappa \succcurlyeq \mu$. Ввиду теоремы К.–Ш.–Б., мы получаем $\kappa \sim \mu$, а потому $\kappa = \mu$ — противоречие. □

Теорема (в ZFC)

Для каждого X имеется единственный кардинал, равномощный X.

Доказательство.

Понятно, что X равномощно некоторому ординалу α, ввиду теоремы Цермело и теоремы о связи в.у.м. и ординалов. Определим

$$\operatorname{card}(X) := \bigcap\{\beta \in \alpha + 1 \mid \beta \sim X\}.$$

Таким образом, $\operatorname{card}(X)$ является наименьшим из ординалов, равномощных X. Легко проверить, что он будет искомым кардиналом. $\square$

В дальнейшем $\mathrm{card}\,(X)$ будет обозначать кардинал, равномощный X; вместо $\mathrm{card}\,(X)$ часто пишут $|X|$, разумеется.

Предложение (в ZFC)

Для любых X и Y верно следующее:

i. $X \sim Y$ *тогда и только тогда, когда* $\mathrm{card}\,(X) = \mathrm{card}\,(Y)$;

ii. $X \preccurlyeq Y$ *тогда и только тогда, когда* $\mathrm{card}\,(X) \leqslant \mathrm{card}\,(Y)$. □

Сложение и умножение кардиналов

Для любых кардиналов κ и μ определим

$$\begin{aligned}\kappa + \mu &:= \operatorname{card}(\kappa \times \{0\} \cup \mu \times \{1\}),\\ \kappa \cdot \mu &:= \operatorname{card}(\kappa \times \mu).\end{aligned}$$

Хотя кардиналы представляют собой частные случаи ординалов, $+$ и $\cdot$ на кардиналах определяются не так, как на ординалах. Например,

$$\omega, \quad \omega + 1, \quad \omega + \omega, \quad \omega \cdot \omega$$

являются попарно различными ординалами, однако при этом

$$\aleph_0 = \aleph_0 + 1 = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0.$$