УДК 530.145 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

# ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В КВАНТОВЫХ СИСТЕМАХ НА ТОРЕ

Академик В. В. Козлов, член-корреспондент Д. В. Трещев *

## 1 ВВЕДЕНИЕ

Пусть

$$H = \frac{1}{2}(p,p) + \varepsilon V(x) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} p_j^2 + \varepsilon V(x_1, \ldots, x_n) \qquad (1.1)$$

— классический гамильтониан, $x \bmod 2\pi$ — угловые обобщенные координаты, $p$ — сопряженные импульсы, $V : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$ — потенциальная энергия, $\varepsilon$ — малый параметр. Операция квантования

$$x \mapsto \hat{x}, \quad p \mapsto \hat{p} = -i\hbar\partial/\partial x$$

*Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

ставит ему в соответствие дифференциальный оператор второго порядка

$$\hat{H} = -\hbar^2 \Delta/2 + \varepsilon \hat{V}(x), \tag{1.2}$$

где $\Delta$ — оператор Лапласа, а $\hat{x}$ и $\hat{V}(x)$ — операторы умножения на $x$ и $V(x)$ соответственно.

Пуанкаре изучал задачу о наличии у классической системы с гамильтонианом (1.1) дополнительного интеграла в виде ряда по степеням малого параметра

$$F = F_0(x, y) + \varepsilon F_1(x, y) + \varepsilon^2 F_2(x, y) + \ldots \tag{1.3}$$

с гладкими коэффициентами $F_k$, которые $2\pi$-периодически зависят от угловых переменных $x_1, \ldots, x_n$. Такие интегралы Пуанкаре называл *однозначными.* При этом, конечно, предполагается, что функции (1.1) и (1.3) независимы. Важную роль в условиях существования новых однозначных интегралов играет строение *резонансного множества*

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}^n} \big\{p \in \mathbb{R}^n : (k, p) = 0,\ v_k \neq 0\big\}, \tag{1.4}$$

где $v_k$ — коэффициенты разложения потенциальной энергии в ряд Фурье:

$$V(x) = \sum v_k e^{i(k,x)}.$$

Детали см. в [1, 2].

Мы будем рассматривать похожую задачу о наличии "*однозначных*" операторов

$$\hat{A} = \hat{A}_0 + \varepsilon \hat{A}_1 + \ldots, \tag{1.5}$$

коммутирующих с оператором Гамильтона (1.2): $[\hat{H}, \hat{A}] = 0$. Здесь скобки $[\,,]$ обозначают квантовый коммутатор:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = -\frac{1}{i\hbar}(\hat{A} \circ \hat{B} - \hat{B} \circ \hat{A}).$$

Однозначность означает, что коэффициенты формального по $\varepsilon$ ряда (1.5) имеют вид

$$\hat{A}_k = \sum_{\mu} a_{\mu}^{(k)}(x)(-i\hbar\partial)^{\mu}, \qquad \mu \in \mathbb{Z}_+^n, \tag{1.6}$$

где $\partial^{\mu} = \partial_1^{\mu_1} \dots \partial_n^{\mu_n}$, $\partial_j = \partial/\partial x_j$, $a_{\mu}^{(k)}(x)$ — гладкие $2\pi$-периодические функции координат $x_1, \dots, x_n$ (вообще говоря, комплекснозначные). Будем предполагать, что операторы (1.5) и (1.2) независимы. Это предположение будет уточнено ниже.

Дифференциальному оператору (1.6) сопоставим его *символ*

$$A_k(x,p) = \operatorname{symb} \hat{A}_k = \sum_{\mu} a_{\mu}^{(k)}(x)p^{\mu}$$

— формальный степенной ряд по переменным $p = (p_1, \dots, p_n)$. Поскольку в записи оператора (1.6) все дифференцирования отнесены вправо, соответствие между операторами и их символами взаимно однозначное.

Ниже нам потребуются два свойства символов:

$$\operatorname{symb}[\hat{A}, \hat{V}] = -\frac{1}{i\hbar}\big(A(x, p - i\hbar\partial) - A(x,p)\big)V(x), \tag{1.7}$$

$$\operatorname{symb}[\hat{A}, -\Delta] = \big(2(p,\partial) - i\hbar\partial^2\big)A(x,p). \tag{1.8}$$

Здесь $\partial = (\partial_1, \dots, \partial_n)$ и оператор Лапласа $\partial^2 = (\partial, \partial) = \Delta$ действуют на функции от $x_1, \dots, x_n$. Соотношения (1.7) и (1.8) проверяются прямым вычислением.

# 2 РЕЗОНАНСЫ

Разлагая левую часть равенства $[\hat{A}, \hat{H}] = 0$ в ряд по степеням $\varepsilon$, получаем цепочку коммутационных соотношений:

$$[\hat{A}_0, -\Delta] = 0, \tag{2.1}$$

$$[\hat{A}_0, \hat{V}] + \tfrac{1}{2}[\hat{A}_1, -\Delta] = 0, \tag{2.2}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Покажем сначала, что оператор $\hat{A}_0$ не зависит от $x$. Для этого воспользуемся (2.1) и соотношением (1.8):

$$(2(p, \partial) - i\hbar\partial^2)A_0(x, p) = 0. \tag{2.3}$$

Представим функцию $A_0$ в виде ряда Фурье:

$$A_0 = \sum a_k(p)e^{i(k,x)}, \qquad k \in \mathbb{Z}^n.$$

Тогда из (2.3) получим бесконечную серию соотношений

$$[2(p, k) + \hbar(k, k)]a_k(p) = 0, \qquad k \in \mathbb{Z}^n.$$

Поскольку при $k \neq 0$ выражение в квадратных скобках обращается в нуль только на одной гиперплоскости в $\mathbb{R}^n = \{p\}$, то $a_k(p) \equiv 0$ для всех $k \neq 0$. Что и требовалось.

Этот факт вполне аналогичен замечанию Пуанкаре о том, что функция $F_0$ в разложении (1.3) зависит только от канонических импульсов. Если оператор $\hat{A}_0$ не зависит от $x$, то соотношение (2.1) заведомо выполнено.

Исследуем теперь соотношение (2.2). Используя тождества (1.7)–(1.8) и разложения Фурье, получим:

$$-\frac{1}{i\hbar}v_k\big(A_0(p-i\hbar\partial)-A_0(p)\big)e^{i(k,x)}+\frac{1}{2}a_k(p)\big(2i(p,k)+i\hbar(k,k)\big)e^{i(k,x)} = 0.$$

Здесь $a_k(p)$ — коэффициенты Фурье функции $A_1(x,p)$. Эти равенства можно представить в эквивалентном виде:

$$\frac{1}{\hbar}\big(A_0(p+\hbar k)-A_0(p)\big)e^{i(k,x)}v_k+\frac{1}{2\hbar}\big((p+\hbar k,k+\hbar k)-(p,p)\big)a_k(p)=0 \tag{2.4}$$

для всех $k\in\mathbb{Z}^n$.

Положим теперь

$$2(p,k)+\hbar(k,k)=0, \qquad v_k\neq 0. \tag{2.5}$$

Тогда из (2.4) вытекает, что

$$A_0(p+\hbar k)=A_0(p). \tag{2.6}$$

Таким образом, роль резонансного множества (1.4) в квантовой механике играет объединение гиперплоскостей (2.5). В отличие от классического случая, эти гиперплоскости не проходят через начало координат $p=0$ и, если их бесконечно много, накапливаются в окрестности *"бесконечно удаленных точек"*.

Наша цель — доказать, что в типичной ситуации из (2.6) вытекает, что $A_0$ — функция от $(p,p)$. Если $A_0=f((p,p))$, то $\hat{A}_0=f(\Delta)$. Отсюда вытекает (по крайней мере, на формальном уровне), что оператор (1.5) выражается через оператор Гамильтона (1.2) и поэтому не порождает новых законов сохранения. Действительно, оператор $\hat{A}-f(-2\hat{H})$ коммутирует с оператором $\hat{H}$ и его разложение по степеням $\varepsilon$ не содержит свободного слагаемого:

$$\hat{A}-f(-2\hat{H})=\varepsilon(\hat{A}_0'+\varepsilon\hat{A}_1'+\ldots).$$

Оператор в круглой скобке справа коммутирует с оператором $\hat{H}$, причем $\hat{A}_0'$ не зависит от переменных $x_1,\ldots,x_n$ и также является функцией от оператора Лапласа. Следовательно,

$$\hat{A}=f(-2\hat{H})+\varepsilon g(-2\hat{H})+\ldots$$

Типичность ситуации состоит в том, что в разложении Фурье потенциальной энергии присутствуют практически все гармоники. Отсюда можно сделать вывод о том, что классическое резонансное множество (1.4) всюду плотно в $\mathbb{R}^n = \{p\}$. В свою очередь это сразу же влечет зависимость функций $F_0(p)$ и $(p, p)$.

Как уже отмечалось, в квантовом случае ситуация более сложная. Например, при $n = 1$ из (2.5) вытекает, что $p = -\hbar k/2$, и поэтому соотношение (2.6) принимает вид

$$A_0(\hbar k/2) = A_0(-\hbar k/2)$$

для всех целых $k$ (если, конечно, все $v_k \neq 0$). Нам же надо показать, что $A_0$ — четная функция от $p$ (или, что то же самое, $A_0$ — функция от $p^2$). Это заведомо так, если $A_0$ — полином относительно $p$. Однако, в общем случае функция $A_0(p)$ не обязательно четная. Вот простой пример: $A_0 = \sin(2\pi p/\hbar)$.

**Замечание**. Устремляя в (2.5) $\hbar$ к нулю, получаем резонансное соотношение в классическом случае. Это вполне соответствует известному переходу от квантовой механики к классической при стремлении к нулю постоянной Планка.

В работах [3, 4] обсуждается возможность распространения теории Пуанкаре на квантовые системы. Рассматривается задача о малых возмущениях линейной колебательной системы ("модель Фредерикса"). Однако, эта задача имеет косвенное отношение к теории Пуанкаре, поскольку невозмущенная система сильно вырождена и имеющееся резонансное соотношение отличается от (2.5). Чтобы приблизить рассмотрения [3, 4] к теории Пуанкаре, следует рассматривать "квазилинейные" гамильтоновы системы, нетривиально зависящие (кроме параметра $\varepsilon$) еще от одного параметра $\mu$. В этом случае появляется несколько резонансов (при разных значениях $\mu$), препятствующих существованию коммутирующего оператора, аналитически зависящего от $\varepsilon$ и $\mu$.

Для классических систем эта идея реализована в [5] (см. также [2]).

## 3 УСЛОВИЯ НЕИНТЕГРИРУЕМОСТИ

Наша задача свелась к следующей: найти условия, при которых из (2.5) и (2.6) вытекает, что $A_0(p)$ есть функция от $(p, p)$. Рассмотрим сначала случай, когда оператор $\hat{A}$ является *полиномом* относительно дифференцирований $\partial_1, \ldots, \partial_n$ с однозначными на $\mathbb{T}^n$ коэффициентами. Тогда $A_0$ будет полиномом от $p_1, \ldots, p_n$. Отметим, что во всех известных задачах операторы, коммутирующие с оператором Гамильтона, являются полиномами (или функциями от полиномов).

*Спектром* $S$ потенциала $V(x)$ назовем множество целочисленных векторов $k \in \mathbb{Z}^n$ таких, что $v_k \neq 0$. Так как $V$ вещественнозначен, множество $S$ инвариантно при отражении $k \mapsto -k$. Множество $S \subset \mathbb{C}^n$ назовем *ключевым* (или *множеством единственности*) для пространства полиномов на $\mathbb{C}^n$, если любой полином, равный нулю в точках $S$, тождественно обращается в нуль на $\mathbb{C}^n$.

Ясно, что $\mathbb{Z}^n$ — ключевое множество. Укажем достаточное условие того, что множество $S$ является ключевым. Прямую в $\mathbb{C}^n$, содержащую бесконечно много различных точек спектра $S$ и проходящую через начало кординат, назовем *опорной*. Если совокупность всех опорных прямых образует ключевое множество, то $S$ — также ключевое множество. При $n = 2$ это условие означает, что имеется бесконечно много различных опорных прямых.

**Теорема 1** *Если спектр $S$ квантовой системы — ключевое множество для пространства полиномов в $\mathbb{C}^n$, то эта систе-*

*ма не допускает полиномиальных по дифференцированиям операторов вида (1.5), независимых от оператора Гамильтона (1.2).*

Приведем доказательство этой теоремы в простейшем нетривиальном случае, когда $n = 2$. Пусть $p = (p_1, p_2)$, $k = (k_1, k_2)$. Резонансное соотношение (2.5) будет выполнено, если положить

$$p_1 = -\hbar k_1/2 + \alpha k_2, \quad p_2 = -\hbar k_2/2 - \alpha k_1,$$

где $\alpha$ — комплексный параметр. Следовательно, равенство (2.6) принимает вид

$$A_0\Big(-\frac{\hbar k_1}{2}+\alpha k_2, -\frac{\hbar k_2}{2}-\alpha k_1\Big) = A_0\Big(\frac{\hbar k_1}{2}+\alpha k_2, \frac{\hbar k_2}{2}-\alpha k_1\Big). \quad (3.1)$$

Здесь мы положили $A(\cdot) = A_0(-i(\cdot))$.

Сначала заметим, что $p \mapsto A_0(p)$ — четная функция. Действительно, многочлен

$$A_0(p) - A_0(-p) \quad (3.2)$$

обращается в нуль в точках множества $S/2$. Поскольку спектр $S$ — ключевое множество для пространства полиномов над $\mathbb{C}$, разность (3.2) — тождественный нуль.

Далее продифференцируем (3.1) по $\alpha$ и положим затем $\alpha = 0$:

$$\Big(\frac{\partial A_0}{\partial p_1}\Big|_{-\hbar k/2} - \frac{\partial A_0}{\partial p_1}\Big|_{\hbar k/2}\Big)k_2 - \Big(\frac{\partial A_0}{\partial p_2}\Big|_{-\hbar k/2} - \frac{\partial A_0}{\partial p_2}\Big|_{\hbar k/2}\Big)k_1 = 0.$$

Ввиду четности функции $A_0(p)$ это равенство принимает вид

$$\frac{\partial A_0}{\partial p_1}p_2 - \frac{\partial A_0}{\partial p_2}p_1 = 0. \quad (3.3)$$

в точках множества $S/2$. Ввиду ключевого свойства спектра $S$, многочлен в левой части (3.3) тождественно равен нулю. Но тогда из (3.3) вытекает, что $A_0$ есть функция от $(p, p)$. Что и требовалось.

Теорема 1 легко распространяется на более общий случай, когда $A_0(p_1, \ldots, p_n)$ — мероморфная функция в компактифицированном пространстве $n$ комплексных переменных $\overline{\mathbb{C}}^n$. В этом случае (по известной теореме Вейерштрасса-Гурвица) $A_0$ — рациональная функция от $p_1, \ldots, p_n$ (отношение двух полиномов).

# 4 ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Положим теперь $\varepsilon = 1$ в выражении (1.2) для оператора Гамильтона и рассмотрим задачу о наличии дифференциального оператора

$$\hat{A} = \sum a_\mu(x)(-i\hbar\partial)^\mu, \qquad \mu_1 + \ldots + \mu_n \leq M \tag{4.1}$$

с периодическими по координатам $x_1, \ldots, x_n$ коэффициентами, коммутирующего с оператором Гамильтона. Оператор (4.1) — полином относительно дифференцирований $\partial_1, \ldots, \partial_n$; $M$ — степень этого полинома. Его можно представить в виде суммы по однородным формам (относительно $\partial_j$):

$$\hat{A}_M + \hat{A}_{M-1} + \ldots + \hat{A}_0. \tag{4.2}$$

Здесь $k$ — степень однородного оператора $\hat{A}_k$. Пусть

$$A(x, p) = A_M(x, p) + \ldots + A_0(x, p). \tag{4.3}$$

— символ оператора (4.1)–(4.2); $A_k(x, p)$ – полином по $p_1, \ldots, p_n$ степени $k$ с однозначными на $\mathbb{T}^n$ коэффициентами.

Условие $[\hat{H}, \hat{A}] = 0$ сводится к равенству:

$$2(p, \partial/\partial x)A(x,p) - i\hbar\Delta A(x,p) - \frac{1}{i\hbar}\bigl(A(x, p - i\hbar\partial) - A(x,p)\bigr)V(x) = 0. \tag{4.4}$$

Подставляя сумму (4.3) в это равенство и приравнивая нулю однородные формы по $p$, получаем цепочку зацепляющихся уравнений для последовательного нахождения $A_M, A_{M-1}, \ldots, A_0$.

Приравнивая нулю члены степени $M+1$ в (4.4), получаем уравнение

$$(p, \partial/\partial x)A_M(x,p) = 0,$$

из которого легко следует, что старшая форма $A_M$ многочлена (4.3) не зависит от $x$.

Приравнивая нулю сумму членов степени $M$ в левой части (4.4), получим

$$2(p, \partial/\partial x)A_{M-1} - i\hbar\Delta A_M = 0.$$

Так как $A_M$ зависит только от $p$, то форма $A_{M-1}$ также не зависит от координат $x$.

**Замечание**. Для классических уравнений Гамильтона с гамильтонианом (1.1) (где $\varepsilon = 1$) последнее свойство имеет естественный аналог: суммы однородных форм четных и нечетных степеней полиномиального по импульсам первого интеграла также являются первыми интегралами.

С учетом этих свойств, приравнивание нулю суммы слагаемых степени $M-2$ приводит к уравнению

$$2(p, \partial/\partial x)A_{M-2} + (\partial A_M/\partial p, \partial/\partial x)V = 0.$$

Это уравнение хорошо известно в теории интегрируемости классических гамильтоновых систем (см. [1, 2]). Из него, в частности, вытекает, что в точках обычного резонансного множества $\{(p,k) =$

$0, \ v_k \neq 0, k \neq 0\}$ функции $A_M$ и $(p, p)$ зависимы. С помощью этого факта легко доказывается

**Теорема 2** *Предположим, что резонансное множество (1.4) является ключевым для пространства полиномов от $n$ переменных. Тогда любой оператор вида (4.1), коммутирующий с оператором Гамильтона $\hat{H}$, является полиномом от $\hat{H}$ с постоянными коэффициентами.*

В частности, если в разложении потенциальной энергии $V(x)$ присутствуют все гармоники, то квантовая система не допускает нетривиальных дифференциальных полиномиальных операторов, коммутирующих с оператором Гамильтона.

В случае двух степеней свободы условие теоремы 2 заведомо выполняется, если точки спектра $S$ лежат на бесконечном числе различных прямых, проходящих через начало координат.

Будем говорить, что спектр $S$ *разделяется*, если точки спектра лежат в объединении двух подпространств размерности $< n$, ортогонально пересекающихся в начале координат. Если спектр разделяется, то оператор Гамильтона (1.2) разлагается в сумму операторов Гамильтона двух подсистем исходной квантовой системы с $n$ степенями свободы. Каждый из этих двух частичных операторов Гамильтона независим от $\hat{H}$ и коммутирует с $\hat{H}$.

**Теорема 3** *Предположим, что потенциальная энергия $V$ является тригонометрическим многочленом (спектр $S$ конечен). Тогда нетривиальный полиномиальный оператор, коммутирующий с оператором Гамильтона, существует тогда и только тогда, когда спектр квантовой системы разделяется.*

Эта теорема — более сложная по сравнению с теоремой 2. Ее доказательство основано на тщательном анализе *полного* уравнения (4.4).

Мы высказываем *гипотезу*, что теорема 3 справедлива и в самом общем случае, когда спектр $S$ бесконечен. Для классических гамильтоновых систем эта гипотеза обсуждалась в работах [6, 7, 8]. К сожалению, в полном объеме она пока не доказана даже для систем с двумя степенями свободы. Как показано в [8], если такая система допускает неприводимый полиномиальный интеграл степени $n$ и ее спектр лежит на $n$ прямых, проходящих через начало координат, то эти прямые отстоят друг от друга на угол $\pi/n$. Этот результат указывает на глубокие связи, существующие между непрерывными и дискретными симметриями уравнений динамики.

**Благодарности**. Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ 02-01-00400, 02-01-01059, гранта Президента МД-261.2003.01 и INTAS 00-221.

# Список литературы

[1] Пуанкаре А. Избранные труды. Т.I. М.: Наука. 1972.

[2] Козлов В.В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд. дом "Удмуртский университет". 1995.

[3] Antoniou I.E., Prigogine I. // Physica A. 1993, V.192, P.443–464.

[4] Antoniou I.E., Tusaki S. // Int. J. of Quantum Chemistry 1993 V.46, P.425–474.

[5] Козлов В.В. // Вестник Моск. ун-та. Сер. Матем., Механ. 1976, №1, С. 110–115.

[6] Козлов В.В., Трещев Д.В. // Матем. сб. 1988, Т. 135(177), №1, С. 119–138.

[7] Бялый М.Л. // Функцион. анализ и его прилож. 1987, Т.21, № 4, С. 64–65.

[8] Денисова Н.В., Козлов В.В. // Матем. сб. 2000, Т.191, № 2, С. 43–63.