ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2005, т. 250, с. 226–261

УДК 530.145

# Квантовые наблюдаемые: алгебраический аспект[1]

©2005 г. Д. В. Трещев[2]

Поступило в январе 2005 г.

Мы представляем квантовые наблюдаемые рядами относительно некоммутирующих образующих $\widehat{x}$, $\widehat{p}$. Пространство таких рядов оказывается бесконечномерной ассоциативной алгеброй и алгеброй Ли. Для рассматриваемых рядов определяется понятие сходимости. В рамках данного подхода квантовые объекты оказываются некоммутативными аналогами классических. Доказаны квантовые аналоги ряда основных теорем классической механики.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Начнем с некоторых мотивировок. Сначала опишем основные конструкции классической механики в квантовой терминологии (см., например, [5]).

Для простоты предположим, что фазовым пространством классической механической системы является $\mathbb{R}^{2n} = \{(x,p)\colon x \in \mathbb{R}^n,\ p \in \mathbb{R}^n\}$.

Пространство $C^\infty$-гладких функций на $\mathbb{R}^{2n}$ оказывается бесконечномерной алгеброй Ли относительно скобки Пуассона $\{\cdot,\cdot\}$:

$$\{f,g\} = \sum_{j=1}^{n} \left( \frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial g}{\partial p_j} \right). \tag{1.1}$$

Эта алгебра называется пространством классических наблюдаемых.

Чтобы определить систему, следует выбрать наблюдаемую $h$ (функцию Гамильтона). Тогда на пространстве классических наблюдаемых динамика определяется уравнением в частных производных

$$\dot f = \{h,f\} \qquad \text{для любой классической наблюдаемой } f. \tag{1.2}$$

Обычно в классической механике рассматривается динамика в фазовом пространстве:

$$\dot x = \frac{\partial h}{\partial p}, \qquad \dot p = -\frac{\partial h}{\partial x}. \tag{1.3}$$

Уравнение (1.2) в некотором смысле вторично по отношению к обычным уравнениям Гамильтона (1.3). В самом деле, пусть $\phi^t$ — фазовый поток системы (1.3). Тогда решение уравнения (1.2) с начальным условием $f\big|_{t=0} = f_0$ имеет вид $f = f_0 \circ \phi^t$.

Квантовая динамика может быть определена аналогично. Пусть

$$L_2 = L_2(\mathbb{R}^n), \qquad \mathbb{R}^n = \{x = (x_1,\dots,x_n)\},$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05-01-01119).

[2]Механико-математический факультет, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: dtresch@mech.math.msu.su

обозначает гильбертово пространство функций, интегрируемых с квадратом на $\mathbb{R}^n$. Соответствующее эрмитово произведение определено равенством

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\overline{\psi}(x)\,dx.$$

Квантовые наблюдаемые являются эрмитовыми операторами на $L_2$. Для любых двух наблюдаемых $\widehat{f}$, $\widehat{g}$ их коммутатор определен равенством

$$[\widehat{f}, \widehat{g}\,] = -\frac{1}{i\hbar}(\widehat{f} \circ \widehat{g} - \widehat{g} \circ \widehat{f}\,), \tag{1.4}$$

где $i = \sqrt{-1}$ и $\hbar$ — постоянная Планка.

Квантовая наблюдаемая $\widehat{h}$ определяет динамику с помощью уравнения Гейзенберга

$$\dot{\widehat{f}} = [\widehat{h}, \widehat{f}] \qquad \text{для любой квантовой наблюдаемой } \widehat{f}. \tag{1.5}$$

Согласно стандартной процедуре квантования классическим переменным $x_j, p_j$, $j = 1, \dots, n$, сопоставляются их квантовые аналоги $\widehat{x}_j$ и $\widehat{p}_j = -i\hbar\partial/\partial x_j$. Здесь $\widehat{x}_j$ — оператор умножения на $x_j$. Следуя этому правилу, можно определить квантовые аналоги многих классических динамических величин (импульса, кинетического момента, потенциальной энергии и т.д.). Если классическая наблюдаемая содержит произведение двух функций, квантовые аналоги которых не коммутируют, возникают трудности. В этом случае квантование не определено однозначно. Например, классической наблюдаемой $x_j p_j$ можно сопоставить $\widehat{x}_j \circ \widehat{p}_j$, или $\widehat{p}_j \circ \widehat{x}_j$, или $\frac{1}{2}(\widehat{x}_j \circ \widehat{p}_j + \widehat{p}_j \circ \widehat{x}_j), \dots$

В настоящей работе мы заменяем стандартный язык квантовой механики некоторым новым. Последний более алгебраичен и имеет несколько преимуществ:

- классическая механика становится естественной проекцией квантовой;
- мы не пользуемся разложениями по $\hbar$ и имеем дело со сходящимися рядами;
- удается построить пространства (ассоциативные алгебры и алгебры Ли) квантовых наблюдаемых, замкнутые относительно операций композиции $\circ$ и коммутатора $[\cdot,\cdot]$.

Мы не утверждаем, что наш подход заведомо лучше традиционного. Основной трудностью является интерпретация алгебраических объектов, которыми являются наши квантовые наблюдаемые, в терминах операторов на $L_2(\mathbb{R}^n)$.

## 2. АССОЦИАТИВНАЯ АЛГЕБРА $\mathcal{QO}^{\mathrm{form}}$

Назовем произведение

$$z = z_k \circ \ldots \circ z_1, \qquad z_j \in \{\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_n, \widehat{p}_1, \dots, \widehat{p}_n\}, \quad j = 1, \dots, k,$$

мономом и $\deg z := k$ его степенью. Ниже, имея в виду мотивировки из квантовой механики, мы называем мономы и их линейные комбинации наблюдаемыми.

Наблюдаемая

$$F_k = \sum_{\deg z = k} f_z z, \tag{2.1}$$

где $f_z$ — комплексные постоянные, называется однородной формой степени $k$: $\deg F_k = k$. Формы нулевой степени считаются постоянными. Пространство однородных форм степени $k$ будет обозначаться $\mathbf{F}_k$.

Далее мы рассматриваем наблюдаемые, допускающие формальное разложение

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(\widehat{x}, \widehat{p}), \qquad F_k \in \mathbf{F}_k. \tag{2.2}$$

Пусть $\widetilde{\mathcal{QO}}^{\mathrm{form}}(0)$ (или просто $\widetilde{\mathcal{QO}}^{\mathrm{form}}$) обозначает векторное пространство таких наблюдаемых. В $\widetilde{\mathcal{QO}}^{\mathrm{form}}$ различные формальные ряды (2.2) считаются различными элементами. Пространство $\widetilde{\mathcal{QO}}^{\mathrm{form}}$ — свободная ассоциативная (некоммутативная) алгебра над $\mathbb{C}$ относительно композиции $\circ$.

Для $F \in \widetilde{\mathcal{QO}}^{\mathrm{form}}$ скажем, что $F = O_m(\widehat{x}, \widehat{p})$, если в разложении (2.2) $F_0 = \ldots = F_{m-1} = 0$.

Полагая $\mathbf{r}_j := \widehat{p}_j \circ \widehat{x}_j - \widehat{x}_j \circ \widehat{p}_j$, мы рассмотрим идеал $J \subset \widetilde{\mathcal{QO}}^{\mathrm{form}}$, порожденный следующими элементами:

$$\widehat{p}_j \circ \widehat{p}_k - \widehat{p}_k \circ \widehat{p}_j, \qquad 1 \le j, k \le n, \tag{2.3}$$

$$\widehat{x}_j \circ \widehat{x}_k - \widehat{x}_k \circ \widehat{x}_j, \qquad 1 \le j, k \le n, \tag{2.4}$$

$$\widehat{p}_j \circ \widehat{x}_k - \widehat{x}_k \circ \widehat{p}_j, \qquad j \ne k, \tag{2.5}$$

$$\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k, \qquad 1 \le j, k \le n, \tag{2.6}$$

$$\mathbf{r}_j \circ \widehat{p}_j - \widehat{p}_j \circ \mathbf{r}_j, \qquad 1 \le j \le n, \tag{2.7}$$

$$\mathbf{r}_j \circ \widehat{x}_j - \widehat{x}_j \circ \mathbf{r}_j, \qquad 1 \le j \le n. \tag{2.8}$$

Пусть $\mathcal{QO}^{\mathrm{form}}(0)$ (ниже обычно $\mathcal{QO}^{\mathrm{form}}$) — фактор-алгебра $\widetilde{\mathcal{QO}}^{\mathrm{form}}/J$. Назовем $\mathcal{QO}^{\mathrm{form}}$ алгеброй формальных квантовых наблюдаемых над $0 \in \mathbb{C}^{2n}$.

Отметим, что идеал $J$ порожден некоторыми однородными элементами в $\widetilde{\mathcal{QO}}^{\mathrm{form}}$.

Обозначим соответствующую проекцию

$$\pi\colon \widetilde{\mathcal{QO}}^{\mathrm{form}} \to \mathcal{QO}^{\mathrm{form}}.$$

Так как $\pi(\mathbf{r}_1) = \ldots = \pi(\mathbf{r}_n)$, мы обозначаем $\mathbf{r} := \pi(\mathbf{r}_j) \in \mathcal{QO}^{\mathrm{form}}$. Традиционно $\mathbf{r}$ заменяется на $-i\hbar$. Однако мы не будем этого делать. Основная причина состоит в том, что разложения по $\hbar$ в квантовой механике обычно расходятся, а нам хотелось бы оперировать со сходящимися рядами.

Для любого $F \in \mathcal{QO}^{\mathrm{form}}$ скажем, что $F = O_m(\widehat{x}, \widehat{p})$, если существует $\widetilde{F} \in \widetilde{\mathcal{QO}}^{\mathrm{form}}$ такой, что $\widetilde{F} = O_m(\widehat{x}, \widehat{p})$ и $F = \pi(\widetilde{F})$.

Для любых $F, G \in \mathcal{QO}^{\mathrm{form}}$ таких, что $F = O_m(\widehat{x}, \widehat{p})$, $G = O_l(\widehat{x}, \widehat{p})$, имеем

$$F \circ G = O_{m+l}(\widehat{x}, \widehat{p}), \qquad F + G = O_k(\widehat{x}, \widehat{p}), \qquad k = \min\{m, l\}.$$

В частности, $\mathbf{r} = O_2(\widehat{x}, \widehat{p})$.

## 3. ФОРМАЛЬНЫЕ КЛАССИЧЕСКИЕ НАБЛЮДАЕМЫЕ

Определим пространство $\mathcal{CO}^{\mathrm{form}}$ классических формальных наблюдаемых как пространство формальных рядов

$$F(x,p) = \sum_{\mu,\nu \in \mathbb{Z}_+^{2n}} f_{\mu,\nu} x^\mu p^\nu, \qquad x^\mu = x_1^{\mu_1} \ldots x_n^{\mu_n}, \quad p^\nu = p_1^{\nu_1} \ldots p_n^{\nu_n}.$$

Здесь $x$ и $p$ считаются обычными координатами на $\mathbb{R}^{2n}$. Пространство $\mathcal{CO}^{\mathrm{form}}$ — формальная бесконечномерная ассоциативная (и коммутативная) алгебра.

Пусть $\widehat{J} \subset \widetilde{\mathcal{QO}}^{\mathrm{form}}$ — идеал, порожденный $J$ и $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n$, и пусть $J_0 \subset \mathcal{QO}^{\mathrm{form}}$ — идеал, порожденный $\mathbf{r}$.

Так как $\mathbf{r}$ коммутирует с любым $F \in \mathcal{QO}^{\mathrm{form}}$, имеем

$$J_0 = \mathbf{r} \circ \mathcal{QO}^{\mathrm{form}}. \tag{3.1}$$

Верно следующее очевидное

**Предложение 3.1.** $\mathcal{CO}^{\mathrm{form}} \cong \widetilde{\mathcal{QO}}^{\mathrm{form}}/\widehat{J} \cong \mathcal{QO}^{\mathrm{form}}/J_0$.

Проекции $\widetilde{\mathcal{QO}}^{\mathrm{form}} \to \mathcal{CO}^{\mathrm{form}}$ и $\mathcal{QO}^{\mathrm{form}} \to \mathcal{CO}^{\mathrm{form}}$ напоминают некоторое усреднение. Ниже мы используем для них обозначения

$$\widetilde{\mathrm{aver}}\colon \widetilde{\mathcal{QO}}^{\mathrm{form}} \to \mathcal{CO}^{\mathrm{form}}, \qquad \mathrm{aver}\colon \mathcal{QO}^{\mathrm{form}} \to \mathcal{CO}^{\mathrm{form}}.$$

**Следствие 3.1.** *Отображения* $\widetilde{\mathrm{aver}}$ *и* $\mathrm{aver}$ *являются гомоморфизмами ассоциативных алгебр.*

**Следствие 3.2.** *Диаграмма*

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathcal{QO}}^{\mathrm{form}} \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "\widetilde{\mathrm{aver}}"'] & & \mathcal{QO}^{\mathrm{form}} \arrow[dl, "\mathrm{aver}"] \\ & \mathcal{CO}^{\mathrm{form}} & \end{tikzcd}$$

*коммутативна.*

**Следствие 3.3.** *Для любых* $\widetilde{F} \in J$, $F \in J_0$ *имеем* $\widetilde{\mathrm{aver}}\,\widetilde{F} = 0$ *и* $\mathrm{aver}\, F = 0$.

Из уравнения (3.1) вытекает

**Предложение 3.2.** *Наблюдаемая* $F \in \mathcal{QO}^{\mathrm{form}}$ *лежит в* $J_0$ *тогда и только тогда, когда*

$$F = \mathbf{r} \circ F_0, \qquad F_0 \in \mathcal{QO}^{\mathrm{form}}. \tag{3.2}$$

Скажем, что моном $z \in \widetilde{\mathcal{QO}}^{\mathrm{form}}$ имеет тип $(\mu, \nu) \in \mathbb{Z}_+^{2n}$, если он содержит ровно $\mu_j$ множителей $\widehat{x}_j$ и $\nu_j$ множителей $\widehat{p}_j$, $j = 1, \ldots, n$. Очевидно,

$$\deg z = |\mu| + |\nu| := \mu_1 + \ldots + \mu_n + \nu_1 + \ldots + \nu_n.$$

Скажем, что

$$F^{\varkappa} = \sum_{\mathrm{type}\, z = \varkappa} f_z z, \qquad \varkappa = (\mu, \nu) \in \mathbb{Z}_+^{2n},$$

— однородная форма типа $\varkappa$. Тогда

$$\widetilde{\mathrm{aver}}\, F^{\varkappa} = \left( \sum_{\mathrm{type}\, z = \varkappa = (\mu, \nu)} f_z \right) x^{\mu} p^{\nu}.$$

Пусть $\mathbf{F}^{\varkappa} \subset \widetilde{\mathcal{QO}}^{\mathrm{form}}$ обозначает пространство однородных форм типа $\varkappa$. Отметим, что при $n > 1$ пространства $\pi(\mathbf{F}^{\varkappa})$ и $\pi(\mathbf{F}^{\rho})$, $\varkappa \neq \rho$, могут иметь ненулевое пересечение.

Любую наблюдаемую $F \in \widetilde{\mathcal{QO}}^{\mathrm{form}}$ можно разложить по однородным формам типа $\varkappa$:

$$F = \sum_{\varkappa \in \mathbb{Z}_+^{2n}} F^{\varkappa}, \qquad F^{\varkappa} \in \mathbf{F}^{\varkappa}. \tag{3.3}$$

Тогда

$$\widetilde{\mathrm{aver}}\, F = \sum_{\varkappa \in \mathbb{Z}_+^{2n}} \widetilde{\mathrm{aver}}\, F^{\varkappa}.$$

## 4. КОММУТАТОР НА $\mathcal{QO}^{\mathrm{form}}$

Пространство $\mathcal{CO}^{\mathrm{form}}$ является алгеброй Ли. Соответствующий коммутатор $\{\cdot,\cdot\}$ — скобка Пуассона (1.1). В этом разделе мы вводим на $\mathcal{QO}^{\mathrm{form}}$ структуру формальной алгебры Ли.

Предложение 3.2 означает, что следующее отображение корректно определено:

$$\Omega\colon J_0 \to \mathcal{QO}^{\mathrm{form}}, \qquad J_0 \ni F \mapsto \Omega(F) = F_0,$$

где $F_0 = F_0(F)$ удовлетворяет (3.2). Неформально говоря, $\Omega$ — оператор деления на $\mathbf{r}$.

Для любых $F, G \in \mathcal{QO}^{\mathrm{form}}$ имеем $F \circ G - G \circ F \in J_0$. Определим

$$[F, G] = \Omega(F \circ G - G \circ F). \tag{4.1}$$

Коммутатор (4.1) очевидно удовлетворяет тождеству Якоби (A.1) и тождеству Лейбница (A.4). Отметим, что (4.1) согласовано с (1.4). Здесь вместо деления $F \circ G - G \circ F$ на $-i\hbar$ мы делим на $\mathbf{r}$, что отличается с алгебраической точки зрения, но является тем же самым с точки зрения физики.

Для любых двух наблюдаемых $F, G$ определим их симметрическое (йорданово) произведение $(\![\cdot,\cdot]\!)$ следующим образом:

$$(\![F, G]\!) := \frac{1}{2}(F \circ G + G \circ F). \tag{4.2}$$

**Предложение 4.1.** *Для любых* $F, G \in \mathcal{QO}^{\mathrm{form}}$

$$\operatorname{aver}(F \circ G) = \operatorname{aver}(\![F, G]\!) = \operatorname{aver} F \cdot \operatorname{aver} G, \tag{4.3}$$

$$\operatorname{aver}[F, G] = \{\operatorname{aver} F, \operatorname{aver} G\}. \tag{4.4}$$

**Следствие 4.1.** *Отображение*

$$\operatorname{aver}\colon \bigl(\mathcal{QO}^{\mathrm{form}}, \circ, [\cdot,\cdot]\bigr) \to \bigl(\mathcal{CO}^{\mathrm{form}}, \cdot, \{\cdot,\cdot\}\bigr)$$

*является гомоморфизмом ассоциативных алгебр и алгебр Ли.*

**Доказательство предложения 4.1.** Уравнения (4.3) вытекают из следствия 3.3. Чтобы доказать (4.4), заметим, что как левая, так и правая части (4.4) билинейны относительно $F$ и $G$. Следовательно, достаточно считать, что $F$ и $G$ — мономы:

$$F = \pi(\widetilde{F}), \qquad G = \pi(\widetilde{G}), \qquad \widetilde{F} \in \mathbf{F}^{\varkappa}, \quad \widetilde{G} \in \mathbf{F}^{\nu}.$$

Используем индукцию по $|\nu|$. Случаи $|\nu| = 0$ и $|\nu| = 1$ рассматриваются легко. Предположим, что (4.4) выполнено при $|\nu| \le k$. Пусть $\deg \widetilde{G} = k+1$. Представим $\widetilde{G}$ в виде произведения $\widetilde{G} = G' \circ G''$, $\deg G', \deg G'' \le k$. Согласно тождеству Лейбница (A.4)

$$\operatorname{aver}[\widetilde{F}, \widetilde{G}] = \operatorname{aver}[\widetilde{F}, G' \circ G''] = \operatorname{aver}\bigl([\widetilde{F}, G'] \circ G''\bigr) + \operatorname{aver}\bigl(G' \circ [\widetilde{F}, G'']\bigr).$$

Используя предположение индукции и (4.3), получаем

$$\operatorname{aver}[\widetilde{F}, \widetilde{G}] = \{\operatorname{aver} \widetilde{F}, \operatorname{aver} G'\} \cdot \operatorname{aver} G'' + \operatorname{aver} G' \cdot \{\operatorname{aver} \widetilde{F}, \operatorname{aver} G''\} =$$

$$= \{\operatorname{aver} \widetilde{F}, \operatorname{aver} \widetilde{G}\}. \quad \square$$

Легко проверить, что скобки $[\cdot,\cdot]$ и $(\![\cdot,\cdot]\!)$ удовлетворяют тождествам (A.2)–(A.4) и (A.5), (A.6).

## 5. БАЗИСЫ В $\pi(\mathbf{F}^{\varkappa})$

**5.1. $xp$-Базис.** Базис в векторном пространстве $\pi(\mathbf{F}^{\varkappa})$ можно получить, используя разложение по $\mathbf{r}$.

Для любого $k=(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{R}^n$ скажем, что $0\preccurlyeq k$, если $0\le k_j$ для любого $j=1,\dots,n$. Скажем, что $k\preccurlyeq\alpha$, если $0\preccurlyeq\alpha-k$.

**Предложение 5.1.** *Любую $F\in\pi(\mathbf{F}^{\alpha,\beta})$ можно единственным образом представить в виде*

$$F=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n_+,\,k\preccurlyeq\alpha,\,k\preccurlyeq\beta} f_k\,\mathbf{r}^{|k|}\circ\pi\bigl(\widehat{x}^{\,\alpha-k}\circ\widehat{p}^{\,\beta-k}\bigr),\qquad |k|=k_1+\ldots+k_n. \tag{5.1}$$

**Следствие 5.1.**

$$\dim\pi(\mathbf{F}^{\alpha,\beta})=m_1\cdot\ldots\cdot m_n,\qquad m_j=\min\{\alpha_j,\beta_j\}+1. \tag{5.2}$$

**Доказательство предложения 5.1.** Существование разложения (5.1) следует из возможности двигать $\pi(\widehat{p}_j)$ направо и $\pi(\widehat{x}_j)$ налево в мономах наблюдаемой $F$ с помощью равенства

$$\pi(\widehat{p}_j\circ\widehat{x}_j)-\pi(\widehat{x}_j\circ\widehat{p}_j)=\mathbf{r}.$$

Единственность разложения (5.1) означает, что равенство (5.1) с $F=0$ выполнено лишь в случае, когда все коэффициенты $f_k$ обращаются в нуль. Этот факт можно легко доказать с помощью индукции по $|k|$. $\square$

Наблюдаемые

$$\mathbf{r}^{|k|}\circ\widehat{x}^{\alpha-k}\circ\widehat{p}^{\beta-k},\qquad k\in\mathbb{Z}^n_+,\quad k\preccurlyeq\alpha,\quad k\preccurlyeq\beta,$$

образуют $xp$-базис в векторном пространстве $\pi(\mathbf{F}^{\alpha,\beta})$. На традиционном языке разложение по $xp$-базисам соответствует $xp$-символу наблюдаемой (см., например, [2]).

**5.2. Примитивный базис.** Назовем моном $z$, $\operatorname{type} z=\varkappa\in\mathbb{Z}^{2n}_+$, *составным*, если $\pi(z)$ можно представить в виде нетривиальной выпуклой комбинации

$$\pi(z)=\vartheta'\pi(z')+\vartheta''\pi(z'')+\ldots+\vartheta^{(s)}\pi\bigl(z^{(s)}\bigr),$$
$$\operatorname{type} z'=\operatorname{type} z''=\ldots=\operatorname{type} z^{(s)}=\varkappa,$$
$$\vartheta',\vartheta'',\dots,\vartheta^{(s)}>0,\qquad \vartheta'+\vartheta''+\ldots+\vartheta^{(s)}=1,\qquad s>1.$$

Остальные мономы назовем *примитивными.* Определим

$$\mathbf{F}^{\varkappa}_{\mathrm{prim}}=\bigl\{\pi(z)\colon\ \operatorname{type} z=\varkappa,\ z\ \text{примитивный}\bigr\}.$$

**Предложение 5.2.** *Рассмотрим случай $n=1$. Для любых $(\mu,\nu)\in\mathbb{Z}^2_+$ таких, что $\mu\le\nu$, примитивными мономами в $\pi(\mathbf{F}^{\varkappa})$ являются*

$$\pi(\widehat{x}^{\mu}\circ\widehat{p}^{\nu}),\ \pi(\widehat{x}^{\mu-1}\circ\widehat{p}^{\nu}\circ\widehat{x}),\ \pi(\widehat{x}^{\mu-2}\circ\widehat{p}^{\nu}\circ\widehat{x}^{2}),\ \dots,\ \pi(\widehat{p}^{\nu}\circ\widehat{x}^{\mu}). \tag{5.3}$$

*В случае $\mu\ge\nu$ примитивные мономы следующие*:

$$\pi(\widehat{p}^{\nu}\circ\widehat{x}^{\mu}),\ \pi(\widehat{p}^{\nu-1}\circ\widehat{x}^{\mu}\circ\widehat{p}),\ \pi(\widehat{p}^{\nu-2}\circ\widehat{x}^{\mu}\circ\widehat{p}^{2}),\ \dots,\ \pi(\widehat{x}^{\mu}\circ\widehat{p}^{\nu}). \tag{5.4}$$

Мы докажем предложение 5.2 в приложении B.

Пусть $\mathbf{F}_j^{\mu_j,\nu_j}$, $\mu_j,\nu_j \in \mathbb{Z}_+$, — пространство однородных форм типа $(\mu_j,\nu_j)$ относительно образующих $\widehat{x}_j$ и $\widehat{p}_j$, и пусть $\mathbf{F}_{j(\mathrm{prim})}^{\mu_j,\nu_j}$ — множество соответствующих примитивных мономов.

Очевидно, при $n>1$ множество $\mathbf{F}_{\mathrm{prim}}^{\mu,\nu}$ может содержать только произведения

$$z_1\circ\ldots\circ z_n, \qquad z_j\in \mathbf{F}_{j(\mathrm{prim})}^{\mu_j,\nu_j}, \quad j=1,\ldots,n. \tag{5.5}$$

**Предложение 5.3.** *Для любых $\mu,\nu\in\mathbb{Z}_+^n$ множество $\mathbf{F}_{\mathrm{prim}}^{\mu,\nu}$ содержит все произведения* (5.5) *и мономы $\pi(z)\in\mathbf{F}_{\mathrm{prim}}^{\mu,\nu}$ образуют базис в векторном пространстве $\pi(\mathbf{F}^{\mu,\nu})$.*

**5.3. Норма на $\pi(\mathbf{F}_m)$.** Для любого $G\in\mathbf{F}_m$, $G=\sum_{\deg z=m} g_z z$, положим

$$\|G\| = \sum_{\deg z=m} |g_z|.$$

Для любого $F\in\pi(\mathbf{F}_m)$ положим

$$\|F\| = \inf_{G\in\mathbf{F}_m,\,\pi(G)=F} \|G\|.$$

Из определения примитивного базиса следует

**Предложение 5.4.** *Для любого $F\in\mathbf{F}_m$ имеем $\|F\|=\sum|f_z|$, где $f_z$ — коэффициенты в разложении $F$ по примитивному базису.*

Заметим, что согласно предложению A.3

$$\|l!\,\mathbf{r}^l\| = 2^l.$$

Это равенство объясняет, почему в степенных разложениях по $\mathbf{r}$ вместо $\mathbf{r}^l$ естественно возникает $l!\,\mathbf{r}^l$. Причина состоит в том, что $\mathbf{r}^l$ “слишком малы” при больших $l$. Этот эффект является источником расходимости разложений по степеням постоянной Планка.

## 6. МАЖОРАНТЫ

Для любого $f=\sum f_{\mu,\nu}x^\mu p^\nu \in \mathcal{CO}^{\mathrm{form}}$ скажем, что $\varphi=\sum\varphi_{\mu,\nu}x^\mu p^\nu\in\mathcal{CO}^{\mathrm{form}}$ является *мажорантой* для $f$ ($f\ll\varphi$), если

$$|f_{\mu,\nu}|\le\varphi_{\mu,\nu} \qquad \text{для всех} \quad (\mu,\nu)\in\mathbb{Z}_+^{2n}.$$

Пусть $\{\{\cdot,\cdot\}\}$ — “мажорантная скобка”,

$$\{\{f(x,p),g(x,p)\}\} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial g}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial g}{\partial p_j}\right).$$

Имеем следующее очевидное

**Предложение 6.1.** *Предположим, что $f\ll\varphi$, $g\ll\psi$ и $a,b\in\mathbb{C}$. Тогда*

$$af+bg\ll|a|\varphi+|b|\psi, \qquad fg\ll\varphi\psi,$$

$$\frac{\partial f}{\partial p_j}\ll\frac{\partial\varphi}{\partial p_j}, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_j}\ll\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}, \qquad j=1,\ldots,n,$$

$$\{f,g\}\ll\{\{\varphi,\psi\}\}.$$

Рассмотрим наблюдаемую $\widetilde{f} = \sum \widetilde{f}_z z \in \widetilde{\mathcal{QO}}^{\mathrm{form}}$. Скажем, что $f = \sum f_{\mu,\nu} x^\mu p^\nu \in \mathcal{CO}^{\mathrm{form}}$ — *абсолютное среднее* для $\widetilde{f}$ ($f = \mathrm{Aver}\,\widetilde{f}$), если

$$f_{\mu,\nu} = \sum_{\mathrm{type}\, z=(\mu,\nu)} |\widetilde{f}_z| \qquad \text{для всех} \quad (\mu,\nu) \in \mathbb{Z}_+^{2n}.$$

Скажем, что $\varphi \in \mathcal{CO}^{\mathrm{form}}$ — *мажоранта* для $\widetilde{f} \in \widetilde{\mathcal{QO}}^{\mathrm{form}}$ ($\widetilde{f} \ll \varphi$), если $\mathrm{Aver}\,\widetilde{f} \ll \varphi$.

Если $f \in \mathcal{QO}^{\mathrm{form}}$, соотношение $f \ll \varphi$ по определению означает, что $\varphi$ — мажоранта для некоторого $\widetilde{f} \in \widetilde{\mathcal{QO}}^{\mathrm{form}}$, $\pi(\widetilde{f}) = f$.

**Предложение 6.2.** *Предположим, что $f, g \in \mathcal{QO}^{\mathrm{form}}$ и $\varphi, \psi \in \mathcal{CO}^{\mathrm{form}}$ таковы, что $f \ll \varphi$ и $g \ll \psi$. Тогда для любых $a, b \in \mathbb{C}$*

$$af + bg \ll |a|\varphi + |b|\psi, \qquad f \circ g \ll \varphi\psi, \qquad [f,g] \ll \{\{\varphi,\psi\}\}.$$

**Доказательство.** Первое соотношение очевидно, а остальные следуют из того факта, что для любых $\widetilde{f}, \widetilde{g} \in \widetilde{\mathcal{QO}}^{\mathrm{form}}$

$$\mathrm{Aver}(\widetilde{f} \circ \widetilde{g}) \ll \mathrm{Aver}\,\widetilde{f} \cdot \mathrm{Aver}\,\widetilde{g}, \qquad \mathrm{Aver}[\widetilde{f}, \widetilde{g}\,] \ll \{\{\mathrm{Aver}\,\widetilde{f}, \mathrm{Aver}\,\widetilde{g}\}\}. \quad \square$$

Пусть $F, F_0 \in \mathbf{F}^{(\mu,\nu)}$ — однородные формы типа $(\mu,\nu) \in \mathbb{Z}_+^{2n}$.

**Предложение 6.3.** *Предположим, что $\pi(F) = \pi(F_0)$ и $\pi$-проекция любого монома из $F_0$ — примитивный моном. Пусть $a, a_0 \in \mathbb{R}$ таковы, что*

$$\mathrm{Aver}\,F = a x^\mu p^\nu, \qquad \mathrm{Aver}\,F_0 = a_0 x^\mu p^\nu.$$

*Тогда* $0 \le a_0 \le a$.

Это предложение аналогично предложению 5.4 и означает, что разложение по примитивному базису дает оптимальную мажоранту для $F \in \mathcal{QO}^{\mathrm{form}}$.

## 7. АНАЛИТИЧЕСКИЕ НАБЛЮДАЕМЫЕ

Скажем, что $F = \sum_{\mu,\nu} f_{\mu,\nu} x^\mu p^\nu \in \mathcal{CO}^{\mathrm{form}}$ лежит в $\mathcal{CO}(c,a)$, если коэффициенты $f_{\mu,\nu}$ оцениваются следующим образом. Для некоторых $c, a > 0$

$$|f_{\mu,\nu}| \le c a^{|\mu|+|\nu|}.$$

Положим $\mathcal{CO} = \bigcup_{c,a>0} \mathcal{CO}(c,a)$. Таким образом, $\mathcal{CO}$ — пространство функций, аналитических в нуле пространства $\mathbb{C}^{2n}$. Структуры ассоциативной алгебры и алгебры Ли на $\mathcal{CO}$ те же, что и на $\mathcal{CO}^{\mathrm{form}}$.

Скажем, что $\widetilde{F} \in \widetilde{\mathcal{QO}}^{\mathrm{form}}$ лежит в пространстве $\widetilde{\mathcal{QO}}$, если

$$\mathrm{Aver}\,\widetilde{F} \in \mathcal{CO}.$$

Скажем, что $F \in \mathcal{QO}^{\mathrm{form}}$ лежит в пространстве $\mathcal{QO}$, если существует $\widetilde{F} \in \widetilde{\mathcal{QO}}$, $\pi(\widetilde{F}) = F$.

**Предложение 7.1.** *Пространство $\widetilde{\mathcal{QO}}$ инвариантно относительно операции $\circ$. Пространство $\mathcal{QO}$ инвариантно относительно операций $\circ$ и $[\cdot,\cdot]$.*

**Доказательство.** Для любых $\widetilde{F}, \widetilde{G} \in \widetilde{\mathcal{QO}}$ имеем $\mathrm{Aver}\,\widetilde{F}, \mathrm{Aver}\,\widetilde{G} \in \mathcal{CO}$. Следовательно, согласно предложению 6.2

$$\mathrm{Aver}(\widetilde{F} \circ \widetilde{G}) \ll \mathrm{Aver}\,\widetilde{F} \cdot \mathrm{Aver}\,\widetilde{G} \in \mathcal{CO}.$$

Пусть $F, G \in \mathcal{QO}$ и $\widetilde{F}, \widetilde{G} \in \widetilde{\mathcal{QO}}$ таковы, что $\pi(\widetilde{F}) = F$, $\pi(\widetilde{G}) = G$. Тогда согласно предложению 6.2

$$F \circ G \ll \operatorname{Aver}(\widetilde{F} \circ \widetilde{G}) \in \mathcal{CO}, \qquad [F, G] \ll \{\{\operatorname{Aver} \widetilde{F}, \operatorname{Aver} \widetilde{G}\}\} \in \mathcal{CO}. \qquad \square$$

Очевидно, $\widetilde{\operatorname{aver}}(\widetilde{\mathcal{QO}}) = \operatorname{aver}(\mathcal{QO}) = \mathcal{CO}$. Согласно (4.3), (4.4) aver — гомоморфизм ассоциативных алгебр и алгебр Ли $\mathcal{QO}$ и $\mathcal{CO}$.

## 8. АНАЛИТИЧНОСТЬ И $xp$-РАЗЛОЖЕНИЯ

В этом разделе мы предъявляем условие аналитичности в терминах разложений по $xp$-базисам.

**Предложение 8.1.** *Предположим, что $F \in \mathcal{QO}^{\mathrm{form}}$ имеет вид*

$$F = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} f_{\alpha,\beta,\gamma} \alpha!\, \mathbf{r}^\alpha \circ \pi\big(\widehat{x}^\beta \circ \widehat{p}^\gamma\big), \qquad \alpha \in \mathbb{Z}_+, \quad \beta, \gamma \in \mathbb{Z}_+^n, \tag{8.1}$$

*где коэффициенты $f_{\alpha,\beta,\gamma}$ имеют экспоненциальную оценку*

$$|f_{\alpha,\beta,\gamma}| < C a^{\alpha+|\beta|+|\gamma|}, \qquad C, a > 0. \tag{8.2}$$

*Тогда $F \in \mathcal{QO}$.*

**Доказательство.** Согласно следствию A.2

$$F \ll \sum_{\alpha,\beta,\gamma} C a^{\alpha+|\beta|+|\gamma|} (2x_1p_1)^\alpha x^\beta p^\gamma = \frac{C}{1 - 2ax_1p_1} \prod_{j=1}^n \frac{1}{(1 - ax_j)(1 - ap_j)}. \qquad \square$$

**Предложение 8.2.** *Любой $F \in \mathcal{QO}$ допускает разложение* (8.1), *где коэффициенты $f_{\alpha,\beta,\gamma}$ оцениваются, как в* (8.2).

**Доказательство.** Рассмотрим случай $n = 1$. Для любого монома $z$, $\operatorname{type} z = (\beta, \gamma)$, $\beta < \gamma$,

$$z = \sum_{j=0}^{\alpha} K_j\, j!\, \mathbf{r}^j \circ \widehat{x}^{\beta-j} \circ \widehat{p}^{\gamma-j}, \qquad |K_j| \le C_\beta^j C_\gamma^j,$$

где $C_u^v$ — биномиальные коэффициенты.

Так как $F$ аналитичен, его однородные формы типа $\beta$, $\gamma$ допускают оценку $F_{\beta,\gamma} \ll C \times$ $\times (a')^{\beta+\gamma} x^\beta p^\gamma$, где можно считать, что $2a' > 1$. Таким образом,

$$F \ll \sum_{\alpha,\beta',\gamma'} C(a')^{\beta'+\gamma'} C_{\beta'}^\alpha C_{\gamma'}^\alpha \alpha!\, \mathbf{r}^\alpha x^{\beta'-\alpha} p^{\gamma'-\alpha} = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} C(a')^{\beta+\gamma+2\alpha} C_{\beta+\alpha}^\alpha C_{\gamma+\alpha}^\alpha \alpha!\, \mathbf{r}^\alpha x^\beta p^\gamma \ll$$

$$\ll \sum_{\alpha,\beta,\gamma} C(2a')^{\beta+\gamma+2\alpha} \alpha!\, \mathbf{r}^\alpha x^\beta p^\gamma \ll \sum_{\alpha,\beta,\gamma} C a^{\beta+\gamma+\alpha} \alpha!\, \mathbf{r}^\alpha x^\beta p^\gamma,$$

где $a = (2a')^2$. В случае $n > 1$ рассуждения аналогичны. $\square$

## 9. ЭРМИТОВЫ НАБЛЮДАЕМЫЕ

Для любого монома $z = z_m \circ \ldots \circ z_1 \in \mathbf{F}_m$ и $f \in \mathbb{C}$ положим $\widetilde{\mathcal{I}}(fz) = \overline{f}\, z_1 \circ \ldots \circ z_m$, где $\overline{f}$ — комплексное сопряжение для $f$. По линейности $\widetilde{\mathcal{I}}$ продолжается до инволюции

$$\widetilde{\mathcal{I}} \colon \widetilde{\mathcal{QO}}^{\mathrm{form}} \to \widetilde{\mathcal{QO}}^{\mathrm{form}}, \qquad \widetilde{\mathcal{I}} \circ \widetilde{\mathcal{I}} = \mathrm{id}.$$

Назовем наблюдаемую $F \in \widetilde{\mathcal{QO}}^{\mathrm{form}}$ эрмитовой в нуле, если $F = \widetilde{\mathcal{I}}F$, и косоэрмитовой в нуле, если $F = -\widetilde{\mathcal{I}}F$.

**Предложение 9.1.** $\widetilde{\mathcal{I}}(J) = J$.

**Доказательство.** Действительно, это простое утверждение следует из того факта, что все образующие (2.3)–(2.8) в $J$ либо эрмитовы, либо косоэрмитовы в нуле. $\square$

Для любого $\widetilde{F} \in \widetilde{\mathcal{QO}}^{\mathrm{form}}$ и $F = \pi(\widetilde{F})$ положим $\mathcal{I}(F) = \pi(\widetilde{\mathcal{I}}\widetilde{F})$. Согласно предложению 9.1 наблюдаемая $\mathcal{I}(F)$ корректно определена.

Мы получили инволюцию $\mathcal{I}\colon \mathcal{QO}^{\mathrm{form}} \to \mathcal{QO}^{\mathrm{form}}$ такую, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathcal{QO}}^{\mathrm{form}} \arrow[r, "\widetilde{\mathcal{I}}"] \arrow[d, "\pi"'] & \widetilde{\mathcal{QO}}^{\mathrm{form}} \arrow[d, "\pi"] \\ \mathcal{QO}^{\mathrm{form}} \arrow[r, "\mathcal{I}"] & \mathcal{QO}^{\mathrm{form}} \end{tikzcd}$$

коммутативна.

**Замечание 9.1.** Пусть $\mathrm{conj}\colon \mathcal{CO}^{\mathrm{form}} \to \mathcal{CO}^{\mathrm{form}}$ — операция комплексного сопряжения. Тогда диаграммы

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathcal{QO}}^{\mathrm{form}} \arrow[r, "\widetilde{\mathcal{I}}"] \arrow[d, "\widetilde{\mathrm{aver}}"'] & \widetilde{\mathcal{QO}}^{\mathrm{form}} \arrow[d, "\widetilde{\mathrm{aver}}"] \\ \mathcal{CO}^{\mathrm{form}} \arrow[r, "\mathrm{conj}"] & \mathcal{CO}^{\mathrm{form}} \end{tikzcd} \quad \text{и} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{QO}^{\mathrm{form}} \arrow[r, "\mathcal{I}"] \arrow[d, "\mathrm{aver}"'] & \mathcal{QO}^{\mathrm{form}} \arrow[d, "\mathrm{aver}"] \\ \mathcal{CO}^{\mathrm{form}} \arrow[r, "\mathrm{conj}"] & \mathcal{CO}^{\mathrm{form}} \end{tikzcd}$$

очевидно коммутативны.

Назовем наблюдаемую $F \in \mathcal{QO}^{\mathrm{form}}$ эрмитовой в нуле, если $F = \mathcal{I}F$.

**Предложение 9.2.** *Следующие утверждения эквивалентны*:

(1) $F \in \mathcal{QO}^{\mathrm{form}}$ *эрмитова в нуле*;

(2) *разложение $F$ по примитивному базису $F = \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^{2n}} \sum_{z \in \mathbf{F}^\kappa_{\mathrm{prim}}} f_z z$ симметрично*: $f_{\mathcal{I}z} = \overline{f}_z$ *для любого $z$.*

Пространство эрмитовых наблюдаемых образует подалгебру Ли в $\mathcal{QO}$. Обозначим ее $\mathcal{QO}^{\mathrm{H}}$. Ниже (см. разд. 14) мы покажем, что если наблюдаемая эрмитова в нуле, она эрмитова везде на своей области определения.

Произведение двух эрмитовых наблюдаемых, вообще говоря, эрмитовым не является. Однако для любых $F, G \in \mathcal{QO}^{\mathrm{H}}$ имеем $[\![F, G]\!] \in \mathcal{QO}^{\mathrm{H}}$.

## 10. ПРАВЫЕ ОБРАТНЫЕ К aver

Отображение aver не имеет правого обратного гомоморфизма

$$\mathrm{Op}\colon \mathcal{CO}^{\mathrm{form}} \to \mathcal{QO}^{\mathrm{form}}, \qquad \mathrm{aver} \circ \mathrm{Op} = \mathrm{id}_{\mathcal{CO}^{\mathrm{form}}}.$$

Мы не будем доказывать этот простой факт, а лишь отметим один аналогичный результат: теорему Гренвальда–ван Хова (см., например, [1, 6]).

**Теорема.** *Не существует линейного отображения* $\mathrm{Op}\colon \mathcal{CO}^{\mathrm{form}} \to \mathcal{QO}^{\mathrm{form}}$, *удовлетворяющего следующим свойствам. Для любых* $F, G \in \mathcal{CO}^{\mathrm{form}}$

(1) $[\mathrm{Op}\, F, \mathrm{Op}\, G] = \mathrm{Op}\{F, G\}$;

(2) $\mathrm{Op}\, x_j = \widehat{x}_j$, $\mathrm{Op}\, p_j = \widehat{p}_j$;

(3) $\mathrm{Op}\, \overline{F} = \mathcal{I}(\mathrm{Op}\, F)$.

На более алгебраичном языке эта теорема означает, что не существует гомоморфизма алгебр Ли $\mathrm{Op}\colon \mathcal{CO} \to \mathcal{QO}^{\mathrm{H}}$, удовлетворяющего условиям (2), (3).

Хорошо известно, что такой гомоморфизм существует, если ограничиться подалгебрами, образованными наблюдаемыми степени не выше 2. Более того, этот гомоморфизм единственный. Он определен уравнениями

$$\mathrm{Op}(p_j p_k) = \widehat{p}_j \circ \widehat{p}_k, \qquad \mathrm{Op}(x_j x_k) = \widehat{x}_j \circ \widehat{x}_k, \qquad \mathrm{Op}(p_j x_k) = \frac{1}{2}(\widehat{p}_j \circ \widehat{x}_k + \widehat{x}_j \circ \widehat{p}_k)$$

для любых $1 \le j, k \le n$.

В литературе рассматриваются различные отображения $\mu\colon \mathcal{CO}^{\mathrm{form}} \to \mathcal{QO}^{\mathrm{form}}$, являющиеся правыми обратными для aver. Как уже отмечалось, эти отображения не являются гомоморфизмами. Ясно, что отображение $\mu$ достаточно определить на мономах $x^\alpha p^\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$.

Если $\mu(F) = \widehat{F}$, то $F$ называется символом квантовой наблюдаемой $\widehat{F}$. Различные отображения $\mu$ определяют $xp$-символы, $px$-символы, символы Вейля, Вика, анти-Вика и т.д. Например,

- $xp$-символы соответствуют отображению $\mu$ такому, что $\mu(x^\alpha p^\beta) = \widehat{x}^\alpha \circ \widehat{p}^\beta$;
- $px$-символы соответствуют $\mu(x^\alpha p^\beta) = \widehat{p}^\beta \circ \widehat{x}^\alpha$;
- для символов Вейля

$$\mu(x^\alpha p^\beta) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{C_{\alpha_j+\beta_j}^{\beta_j}} \sum_{\mathrm{type}\, z_j = (\alpha_j, \beta_j)} \pi(z_j),$$

где $z_j$ — моном в пространстве $\widetilde{\mathcal{QO}}_j^{\mathrm{form}}$ квантовых наблюдаемых с $n = 1$ и образующими $\widehat{x}_j$, $\widehat{p}_j$.

## 11. ТЕОРЕМА О НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ

Назовем наблюдаемые $F_1(\widehat{x}, \widehat{p}), \dots, F_m(\widehat{x}, \widehat{p}) \in \widetilde{\mathcal{QO}}$ независимыми в нуле, если функции $\widetilde{\mathrm{aver}}\, F_1(x, p), \dots, \widetilde{\mathrm{aver}}\, F_m(x, p) \in \mathcal{CO}$ независимы в нуле. Аналогичное определение используется для $F_1, \dots, F_m \in \mathcal{QO}$.

**Теорема 1** (теорема о неявной функции в $\widetilde{\mathcal{QO}}$)**.** *Пусть*

$$X_1(\widehat{x}, \widehat{p}), \dots, X_n(\widehat{x}, \widehat{p}),\ P_1(\widehat{x}, \widehat{p}), \dots, P_n(\widehat{x}, \widehat{p}) \in \widetilde{\mathcal{QO}} \tag{11.1}$$

*— наблюдаемые, независимые в нуле, такие, что* $X(0,0) = P(0,0) = 0$. *Тогда существуют* $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n \in \widetilde{\mathcal{QO}}$ *такие, что* $\widehat{x}_j = u_j(X, P)$, $\widehat{p}_j = v_j(X, P)$.

**Следствие 11.1** (теорема о неявной функции в $\mathcal{QO}$)**.** *Пусть*

$$X_1(\widehat{x}, \widehat{p}), \dots, X_n(\widehat{x}, \widehat{p}),\ P_1(\widehat{x}, \widehat{p}), \dots, P_n(\widehat{x}, \widehat{p}) \in \mathcal{QO}$$

*независимы в нуле,* $X(0,0) = P(0,0) = 0$ *и*

$$[X_j, X_k] = [P_j, P_k] = 0, \qquad [P_j, X_k] = \delta_{jk} \qquad \text{для всех} \quad 1 \le j, k \le n. \tag{11.2}$$

*Тогда существуют* $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n \in \mathcal{QO}$ *такие, что*

$$\pi(\widehat{x}_j) = \widehat{u}_j(X, P), \qquad \pi(\widehat{p}_j) = \widehat{v}_j(X, P).$$

Действительно, из уравнения (11.2) следует, что для любых $1 \le j, k \le n$

$$X_j \circ X_k - X_k \circ X_j = P_j \circ P_k - P_k \circ P_j = 0, \qquad P_j \circ X_k - X_k \circ P_j = \delta_{jk}\mathbf{r}.$$

Следовательно, $F(X,P) = 0$ для любой наблюдаемой $F \in J$. Таким образом, можно положить $\widehat{u} = \pi(u)$, $\widehat{v} = \pi(v)$, где $u, v \in \widetilde{\mathcal{QO}}$ построены в теореме 1.

**Доказательство теоремы 1.** Пусть

$$\begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} \widehat{x} \\ \widehat{p} \end{pmatrix} + F(\widehat{x}, \widehat{p}), \qquad F(\widehat{x}, \widehat{p}) = \sum_{k=2}^{\infty} F_k(\widehat{x}, \widehat{p}), \tag{11.3}$$

где $L\colon \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ — линейный оператор и $F_k$ — векторнозначные однородные формы степени $k$. Положим

$$\begin{pmatrix} \widehat{X} \\ \widehat{P} \end{pmatrix} = L^{-1} \begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix}, \qquad \widehat{F}(\widehat{x}, \widehat{p}) = L^{-1} F(\widehat{x}, \widehat{p}), \qquad \widehat{F}_k(\widehat{x}, \widehat{p}) = L^{-1} F_k(\widehat{x}, \widehat{p}).$$

Тогда уравнение (11.3) принимает вид

$$\begin{pmatrix} \widehat{X} \\ \widehat{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{x} \\ \widehat{p} \end{pmatrix} + \widehat{F}(\widehat{x}, \widehat{p}). \tag{11.4}$$

Можно считать, что для некоторого $a > 0$

$$F_k(\widehat{x}, \widehat{p}) \ll q a^k \xi^k, \qquad k \ge 2, \quad \xi = x_1 + \ldots + x_n + p_1 + \ldots + p_n, \tag{11.5}$$

где мажорантные неравенства (11.5) следует понимать в том смысле, что $qa^k\xi^k$ — мажоранта для каждой компоненты вектора $F_k$. Тогда

$$\widehat{F}_k(\widehat{x}, \widehat{p}) \ll q_* a^k \xi^k, \qquad k \ge 2, \quad q_* = \mathbf{L} q, \tag{11.6}$$

где $\mathbf{L} = \|L^{-1}\|_1$ — $l_1$-норма $L^{-1}$.

Мы хотим решить уравнение (11.4) относительно $\widehat{x}$ и $\widehat{p}$, т.е. построить наблюдаемые $\widehat{x} = u(\widehat{X}, \widehat{P})$, $\widehat{p} = v(\widehat{X}, \widehat{P})$, удовлетворяющие (11.4).

Уравнение (11.4) записывается в виде

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathcal{M} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \tag{11.7}$$

где

$$\mathcal{M}\colon \begin{pmatrix} u(\widehat{X}, \widehat{P}) \\ v(\widehat{X}, \widehat{P}) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \widehat{X} \\ \widehat{P} \end{pmatrix} - \widehat{F}(u, v).$$

Пусть $\vartheta(\widehat{X},\widehat{P})$ обозначает $2n$-мерный вектор $\left(\begin{smallmatrix} u(\widehat{X},\widehat{P}) \\ v(\widehat{X},\widehat{P}) \end{smallmatrix}\right)$. Рассмотрим последовательность $\vartheta^0, \vartheta^1, \ldots$, где

$$\vartheta^0 = \begin{pmatrix} \widehat{X} \\ \widehat{P} \end{pmatrix}, \qquad \vartheta^{s+1} = \mathcal{M}(\vartheta^s).$$

Имеем следующее очевидное

**Предложение 11.1.** *Наблюдаемые $\vartheta^{s+1}$ и $\vartheta^s$ совпадают во всех порядках, меньших $s+1$.*

**Следствие 11.2.** *Функции $\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) = \vartheta^s(\widehat{X},\widehat{P})$ удовлетворяют* (11.7) *во всех порядках, меньших $s+1$.*

**Следствие 11.3.** *Последовательность $\vartheta^0, \vartheta^1, \ldots$ сходится во всех порядках к $\vartheta \in \in \widetilde{\mathcal{QO}}^{\mathrm{form}}$ — формальному решению* (11.7).

**Доказательство предложения 11.1.** Индукция. $\square$

**Предложение 11.2.** *Предел $\vartheta$ лежит в $\widetilde{\mathcal{QO}}$.*

**Доказательство.** Положим $\vartheta(\widehat{X},\widehat{P}) = \sum_{k=1}^{\infty} \vartheta_k(\widehat{X},\widehat{P})$, где $\vartheta_k$ — однородная форма степени $k$. Далее для удобства мы заменим аргументы $\widehat{X}$, $\widehat{P}$ функций $\vartheta$, $\vartheta_k$ на $\widehat{x}$, $\widehat{p}$.

Пусть дана аналитическая функция $g(\xi)$ с $\xi$, удовлетворяющим (11.5). Скажем, что $\vartheta(\widehat{x},\widehat{p}) \ll g(\xi)$, если $g(\xi)$ — мажоранта для каждой компоненты вектора $\vartheta$. Считая, что $\vartheta_k(\widehat{x},\widehat{p}) \ll a^k q_k \xi^k$, мы оценим коэффициенты $q_k$.

Определим $f(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a^{k+2} q_{k+2} \xi^k$. Тогда

$$\vartheta(\widehat{x},\widehat{p}) \ll \xi + \xi^2 f(\xi).$$

Согласно (11.7)

$$\vartheta_1(\widehat{x},\widehat{p}) = \begin{pmatrix} \widehat{x} \\ \widehat{p} \end{pmatrix}, \qquad \vartheta_s(\widehat{x},\widehat{p}) = -\sum_{k=2}^{s} \bigl(\widehat{F}_k(\vartheta(\widehat{x},\widehat{p}))\bigr)_s, \qquad s \geq 2, \tag{11.8}$$

где $(\cdot)_s$ обозначает однородную форму степени $s$ по $\widehat{x}$ и $\widehat{p}$. Важно отметить, что правая часть второго равенства (11.8) зависит только от форм $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{s-1}$.

Из (11.8) и (11.6) следует, что

$$\vartheta_s(\widehat{x},\widehat{p}) \ll \left( \sum_{k=2}^{s} q_* a^k (2n)^k \bigl(\xi + \xi^2 f(\xi)\bigr)^k \right)_s, \qquad s \geq 2,$$

где $(\cdot)_s$ обозначает коэффициент при $\xi^s$. Получаем

$$\vartheta(\widehat{x},\widehat{p}) \ll \xi + \sum_{k=2}^{\infty} q_* a^k (2n)^k \bigl(\xi + \xi^2 f(\xi)\bigr)^k.$$

Таким образом, можно взять $f$ удовлетворяющим уравнению

$$\xi^2 f(\xi) = \sum_{k=2}^{\infty} q_* a^k (2n)^k \bigl(\xi + \xi^2 f(\xi)\bigr)^k,$$

которое эквивалентно следующему:

$$\bigl(1 - 2an(\xi + \xi^2 f)\bigr) f = 4n^2 q_* a^2 (1 + \xi f)^2.$$

Это квадратное по $f$ уравнение имеет аналитическое решение

$$f(\xi)=\frac{1-A\xi-\sqrt{(1-A\xi)^2-B^2\xi^2}}{2C\xi^2},$$

$$A=2na(1+4naq_*),\qquad B^2=32n^3a^3q_*(1+2naq_*),\qquad C=2na(1+2naq_*).$$

Очевидно, $0<B<A$ и $0<C<A$. Согласно предложению C.2 имеем

$$f(\xi)\ll\frac{B(A+B)}{8C(1-(A+B)\xi)}.\quad\square$$

Теорема 1 доказана. $\square$

**Замечание 11.1.** Если наблюдаемые (11.1) эрмитовы, наблюдаемые $u$, $v$, построенные в теореме 1, также эрмитовы.

## 12. АВТОМОРФИЗМЫ $\mathcal{QO}$

Пусть $\widehat{X}_1(\widehat{x},\widehat{p}),\dots,\widehat{X}_n(\widehat{x},\widehat{p}),\widehat{P}_1(\widehat{x},\widehat{p}),\dots,\widehat{P}_n(\widehat{x},\widehat{p})\in\mathcal{QO}$ удовлетворяют (11.2). Назовем такой набор наблюдаемых каноническим.

Определим отображение

$$\mathcal{A}\colon\ \mathcal{QO}\to\mathcal{QO},\qquad \mathcal{QO}\ni F(\widehat{x},\widehat{p})\mapsto\mathcal{A}(F)(\widehat{x},\widehat{p})=F\big(\widehat{X}(\widehat{x},\widehat{p}),\widehat{P}(\widehat{x},\widehat{p})\big).$$

**Предложение 12.1.** *Отображение $\mathcal{A}$ — автоморфизм $(\mathcal{QO},\circ,[\cdot,\cdot])$, т.е.*

(a) $\mathcal{A}$ *линейно*;

(b) $\mathcal{A}(F\circ G)=\mathcal{A}(F)\circ\mathcal{A}(G)$;

(c) $\mathcal{A}(\mathbf{r})=\mathbf{r}$;

(d) $\mathcal{A}([F,G])=[\mathcal{A}(F),\mathcal{A}(G)]$.

**Доказательство.** Утверждения (a), (b) и (c) очевидны, а (d) следует из (c). $\square$

Назовем автоморфизм $\mathcal{A}$ каноническим. Из теоремы о неявной функции следует, что для любого канонического автоморфизма $\mathcal{A}$ существует обратный автоморфизм $\mathcal{A}^{-1}$. Канонические автоморфизмы образуют группу $\mathrm{Aut}(\mathcal{QO})$.

Рассмотрим отображение $a\colon\mathcal{CO}\to\mathcal{CO}$, порожденное симплектической заменой переменных

$$(x,p)\mapsto(X(x,p),P(x,p)),\qquad X=\operatorname{aver}\widehat{X},\quad P=\operatorname{aver}\widehat{P},$$

$$\mathcal{CO}\ni f(x,p)\mapsto a(f)(x,p)=f(X(x,p),P(x,p)).$$

Тогда диаграмма

$$\begin{tikzcd}\mathcal{QO}\arrow[r,"\mathcal{A}"]\arrow[d,"\operatorname{aver}"'] & \mathcal{QO}\arrow[d,"\operatorname{aver}"]\\ \mathcal{CO}\arrow[r,"a"] & \mathcal{CO}\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Очевидно, $a$ — автоморфизм $\big(\mathcal{CO},\cdot,\{\cdot,\cdot\}\big)$. Скажем, что $a$ согласован с $\mathcal{A}$. Пусть дан автоморфизм $a\colon\mathcal{CO}\to\mathcal{CO}$. Тогда существует бесконечно много согласованных с ним $\mathcal{A}\colon\mathcal{QO}\to\mathcal{QO}$.

Автоморфизм $\mathcal{A}$ называется эрмитовым, если он сохраняет $\mathcal{QO}^{\mathrm{H}}$, т.е. $\mathcal{A}(\mathcal{QO}^{\mathrm{H}})\subset\mathcal{QO}^{\mathrm{H}}$. Любой эрмитов автоморфизм можно считать автоморфизмом алгебры Ли–Йордана $(\mathcal{QO}^{\mathrm{H}},[\![\cdot,\cdot]\!]$,

$[\cdot,\cdot])$. Ниже $\mathrm{Aut}(\mathcal{QO}^{\mathrm{H}})$ обозначает группу таких автоморфизмов. Очевидно, $\mathcal{A} \in \mathrm{Aut}(\mathcal{QO}^{\mathrm{H}})$ тогда и только тогда, когда наблюдаемые

$$\mathcal{A}(\widehat{x}_1), \dots, \mathcal{A}(\widehat{x}_n), \mathcal{A}(\widehat{p}_1), \dots, \mathcal{A}(\widehat{p}_n)$$

эрмитовы.

## 13. ОПЕРАТОРЫ $e^{[H,\cdot]}$

Для любых $H, F \in \mathcal{QO}$ положим

$$e^{[H,\cdot]}F = F + \frac{1}{1!}[H,F] + \frac{1}{2!}[H,[H,F]] + \dots \tag{13.1}$$

Очевидно, $F(\widehat{x},\widehat{p},t) := e^{t[H,\cdot]}F_0(\widehat{x},\widehat{p})$ — решение уравнения Гейзенберга

$$\dot F = [H,F], \qquad F\big|_{t=0} = F_0, \qquad F_0, H \in \mathcal{QO}.$$

Если $H$ квадратичен (т.е. $H \in \pi(\mathbf{F}_2)$), то соответствующая замена $(\widehat{x},\widehat{p}) \mapsto e^{[H,\cdot]}(\widehat{x},\widehat{p})$ линейна. В частности, соответствующий автоморфизм $\mathcal{A}$ сохраняет пространства $\mathbf{F}_k$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Группа таких автоморфизмов изоморфна группе линейных симплектических отображений $\mathbb{R}^{2n}$ на себя.

**Предложение 13.1.** *Пусть $H, F \in \mathcal{QO}$ таковы, что*

$$F \ll \frac{A}{a-\xi}, \qquad H \ll \frac{B\xi^s}{b-\xi}, \qquad 0 < a < b, \quad A, B > 0, \quad \xi = x_1 + \dots + x_n + p_1 + \dots + p_n.$$

*Тогда выполняется оценка $e^{t[H,\cdot]F} \ll \Phi(\xi,t)$, где*

$$\Phi = \begin{cases} \dfrac{A}{a-\mu t-\xi}, & \text{если } s = 1,\\[2mm] \dfrac{A}{a-e^{\mu t}\xi}, & \text{если } s = 2, \qquad \mu = \dfrac{2nsbB}{(b-a)^2}.\\[2mm] \dfrac{A}{a-\xi-(s-2)a\mu t\xi^{s-2}}, & \text{если } s \ge 3, \end{cases}$$

**Замечание 13.1.** Случай $s = 0$ можно свести к случаю $s = 1$, если заменить $H(\widehat{x},\widehat{p})$ на $H(\widehat{x},\widehat{p}) - H(0,0)$.

**Следствие 13.1.** *Для любого $H \ll \frac{B\xi^s}{b-\xi}$, $s \ge 2$, оператор $e^{t[H,\cdot]}\colon \mathcal{QO} \to \mathcal{QO}$ определен при всех $t \in \mathbb{C}$.*

**Доказательство предложения 13.1.** Определим

$$W_0(\widehat{x},\widehat{p}) = F(\widehat{x},\widehat{p}), \qquad W_{m+1} = [H, W_m] \quad \text{для любого } \; m \in \mathbb{Z}_+.$$

Основной факт, используемый в доказательстве, состоит в том, что

$$W_m \ll \left(\mu\xi^{s-1}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^m \frac{A}{a-\xi}. \tag{13.2}$$

Эта оценка легко проверяется по индукции. При $m = 0$ она очевидно выполняется. Предположим, что она верна при $m = k$. Тогда

$$W_{k+1} \ll \left\{\!\!\left\{ \frac{B\xi^s}{b-\xi}, \left(\mu\xi^{s-1}\frac{d}{d\xi}\right)^k \frac{A}{a-\xi} \right\}\!\!\right\}.$$

Так как $\frac{d}{d\xi}\frac{\xi^s}{b-\xi} \ll \frac{sb\xi^{s-1}}{(b-\xi)^2}$, $s \geq 1$, имеем

$$W_{k+1} \ll \frac{2nsbB\xi^{s-1}}{(b-\xi)^2}\frac{d}{d\xi}\left(\left(\mu\xi^{s-1}\frac{d}{d\xi}\right)^k\frac{A}{a-\xi}\right).$$

Заметим, что для некоторого многочлена $P(u,v)$

$$\frac{d}{d\xi}\left(\left(\mu\xi^{s-1}\frac{d}{d\xi}\right)^k\frac{A}{a-\xi}\right) = \frac{1}{a-\xi}P\left(\frac{1}{a-\xi},\xi\right)$$

и при любых $0 < a < b$

$$\frac{1}{(b-\xi)(a-\xi)} \ll \frac{1}{(b-a)(a-\xi)}.$$

Поэтому

$$W_{k+1} \ll \frac{2nsbB\xi^{s-1}}{(b-a)^2}\frac{d}{d\xi}\left(\left(\mu\xi^{s-1}\frac{d}{d\xi}\right)^k\frac{A}{a-\xi}\right) = \left(\mu\xi^{s-1}\frac{d}{d\xi}\right)^{k+1}\frac{A}{a-\xi}.$$

Из оценки (13.2) вытекает, что

$$e^{t[H,\cdot]}F \ll \frac{A}{a-g_s^t(\xi)},$$

где $g_s^t$ — фазовый поток обыкновенного дифференциального уравнения $\dot{\xi} = \mu\xi^{s-1}$. Остается воспользоваться равенствами

$$g_s^t(\xi) = \begin{cases} \xi+\mu t, & \text{если } s=1,\\ e^{\mu t}\xi, & \text{если } s=2,\\ \dfrac{\xi}{(1-(s-2)\mu t\xi^{s-2})^{1/(s-2)}} \ll \dfrac{\xi}{1-(s-2)\mu t\xi^{s-2}}, & \text{если } s\geq 3.\end{cases}$$

Предложение доказано. $\square$

**Предложение 13.2.** *Для любого $H \in \mathcal{QO}$, $H = O_2(\widehat{x},\widehat{p})$, отображение $e^{[H,\cdot]}\colon \mathcal{QO} \to \mathcal{QO}$ является каноническим автоморфизмом.*

**Доказательство.** Рассмотрим произвольные $F,G \in \mathcal{QO}$. Согласно следствию 13.1 наблюдаемые $e^{[H,\cdot]}F$, $e^{[H,\cdot]}G$ лежат в $\mathcal{QO}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} e^{[H,\cdot]}F\circ e^{[H,\cdot]}G &= F\circ G + \frac{1}{1!}\big([H,F]\circ G + F\circ[H,G]\big) + \ldots = \\ &= F\circ G + \frac{1}{1!}[H,F\circ G] + \ldots = e^{[H,\cdot]}F\circ G,\\ \big[e^{[H,\cdot]}F, e^{[H,\cdot]}G\big] &= [F,G] + \frac{1}{1!}\big([[H,F],G] + [F,[H,G]]\big) + \ldots = \\ &= [F,G] + \frac{1}{1!}[H,[F,G]] + \ldots = e^{[H,\cdot]}[F,G]. \quad \square \end{aligned}$$

**Замечание 13.2.** Для любого $H \in \mathcal{QO}^{\mathrm{H}}$, $H = O_2(\widehat{x},\widehat{p})$, соответствующий автоморфизм $e^{[H,\cdot]}$ эрмитов.

## 14. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ

Простейший канонический автоморфизм $\mathcal{QO}$ порождается наблюдаемыми

$$X = \widehat{x} + x^0, \qquad P = \widehat{p} + p^0, \qquad (x^0, p^0) = \mathrm{const} \in \mathbb{C}^{2n}.$$

Скажем, что наблюдаемую $F(\widehat{x}, \widehat{p}) \in \mathcal{QO}$ можно аналитически продолжить в точку $(x^0, p^0) \in \mathbb{C}^{2n}$, если $F(\widehat{x} + x^0, \widehat{p} + p^0) \in \mathcal{QO}$. Здесь имеется в виду, что, если подставить $\widehat{x} + x^0$ и $\widehat{p} + p^0$ вместо $\widehat{x}$ и $\widehat{p}$ в разложение $F$ по однородным формам (точнее, в разложение некоторого $\widetilde{F} \in \widetilde{\mathcal{QO}}$, $\pi(\widetilde{F}) = F$) и затем переразложить по $\widehat{x}$ и $\widehat{p}$, получится элемент $\mathcal{QO}$.

Аналитическое продолжение можно выполнить несколько раз, так что, подобно голоморфным функциям, наблюдаемые из $\mathcal{QO}$ можно аналитически продолжать (если это возможно) вдоль кривых на $\mathbb{C}^{2n}$.

Назовем наблюдаемую $F \in \mathcal{QO}$ аналитической на множестве $D \subset \mathbb{C}^{2n}$, если $F$ можно аналитически продолжить на $D$. В этом случае мы пишем $F \in \mathcal{QO}(D)$.

Любая наблюдаемая $F \in \mathcal{QO}(D)$, $D \subset \mathbb{C}^{2n}$, определяет отображение

$$\mathcal{F}\colon\ D \to \mathcal{QO}, \qquad D \ni (x, p) \mapsto \mathcal{F}(x, p; \widehat{x}, \widehat{p}) = F(x + \widehat{x}, p + \widehat{p}).$$

Имеем следующее очевидное равенство. Для любой точки $(x^0, p^0) \in D$

$$\mathcal{F}(x^0 + x, p^0 + p; \widehat{x}, \widehat{p}) = \mathcal{F}(x^0, p^0; \widehat{x} + x, \widehat{p} + p), \tag{14.1}$$

где $(x, p) \in \mathbb{C}^{2n}$ — произвольный малый вектор.

Таким образом, мы получаем эквивалентное определение $\mathcal{QO}(D)$. Скажем, что наблюдаемая $F$ аналитична на $D$, если она определена равенством

$$F(x + \widehat{x}, p + \widehat{p}) = \mathcal{F}(x, p; \widehat{x}, \widehat{p}), \qquad (x, p) \in D,$$

для некоторого отображения $\mathcal{F}\colon D \to \mathcal{QO}$, удовлетворяющего (14.1).

Если $D \subset \mathbb{R}^{2n}$ и $F\big(\overline{\widehat{x}}, \overline{\widehat{p}}\big) = \overline{F}(\widehat{x}, \widehat{p})$, мы говорим, что $F$ вещественно аналитична на $D$.

Наблюдаемая $F$ называется эрмитовой в точке $(x^0, p^0)$, если $F(\widehat{x} + x^0, \widehat{p} + p^0)$ эрмитова в нуле.

**Предложение 14.1.** *Предположим, что $F \in \mathcal{QO}(D)$ эрмитова в нуле. Тогда она эрмитова в любой точке $(x^0, p^0) \in D$.*

**Доказательство.** Достаточно проверить, что утверждение выполнено для наблюдаемой $F = \pi(fz + \overline{f}\mathcal{I}z)$, где $z$ — моном. В этом случае утверждение очевидно. $\square$

**Предложение 14.2.** *Предположим, что $F \in \mathcal{CO}$ — мажоранта для $\widehat{F} \in \mathcal{QO}$ ($\widehat{F} \ll F$) и $F$ аналитична в области*

$$D(x^0, p^0) = \big\{(x, p) \in \mathbb{C}^{2n}\colon\ |x_j| \le x_j^0,\ |p_j| \le p_j^0,\ j = 1, \dots, n\big\}.$$

*Тогда $\widehat{F} \in \mathcal{QO}(D(x^0, p^0))$.*

**Доказательство.** В самом деле, пусть $\widehat{G} \in \widetilde{\mathcal{QO}}$ такова, что

$$\pi(\widehat{G}) = \widehat{F}, \qquad \widehat{G} \ll F.$$

Так как для любых $(\widetilde{x}, \widetilde{p})$ функция

$$f(x,p) = F\big(x_1 + |\widetilde{x}_1|, \dots, x_n + |\widetilde{x}_n|, p_1 + |\widetilde{p}_1|, \dots, p_n + |\widetilde{p}_n|\big)$$

аналитична в нуле, наблюдаемая $\widetilde{G}(\widehat{x}, \widehat{p}) = \widehat{G}(\widehat{x} + \widetilde{x}, \widehat{p} + \widetilde{p})$ удовлетворяет соотношениям

$$\widetilde{G}(\widehat{x}, \widehat{p}) \ll f(x,p), \qquad \pi\big(\widetilde{G}(\widehat{x}, \widehat{p})\big) = \widehat{F}(\widehat{x} + \widetilde{x}, \widehat{p} + \widetilde{p}). \quad \square$$

Если $F \in \mathcal{QO}(D)$, то для любой области $D_1 \subset D$ имеем $F \in \mathcal{QO}(D_1)$. Таким образом, имеем естественное отображение ограничения $\mathcal{QO}(D) \to \mathcal{QO}(D_1)$.

## 15. ФУНКЦИЯ НАБЛЮДАЕМОЙ

Пусть $F_1, \dots, F_k \in \mathcal{QO}(D)$ — коммутирующие наблюдаемые:

$$[F_j, F_s] = 0, \qquad 1 \le j, s \le k.$$

Рассмотрим векторнозначную функцию $\operatorname{aver} F$, где $F = (F_1, \dots, F_k)$. Обозначим $D_0 = F(D) \subset \subset \mathbb{C}^k$.

**Предложение 15.1.** *Пусть $f\colon D_0 \to \mathbb{C}$ — аналитическая функция. Тогда $f(F) \in \mathcal{QO}(D)$ корректно определена и* $\operatorname{aver} f(F) = f(\operatorname{aver} F)$.

*Более того, если $F_1, \dots, F_k \in \mathcal{QO}^{\mathrm{H}}$ и $f$ вещественно аналитична, то $f(F) \in \mathcal{QO}^{\mathrm{H}}$.*

**Доказательство.** Для любых $(x^0, p^0) \in D$ имеем $F_s(\widehat{x} + x^0, \widehat{p} + p^0) \in \mathcal{QO}$, $s = 1, \dots, k$. Положим $z^0 = \operatorname{aver} F(x^0, p^0) \in D_0$. Тогда

$$F\big(\widehat{x} + x^0, \widehat{p} + p^0\big) - z^0 = \Phi(\widehat{x}, \widehat{p}) = O_1(\widehat{x}, \widehat{p}). \tag{15.1}$$

Так как $f(z + z^0)$ аналитична по $z$ в точке $z = 0 \in \mathbb{C}^k$:

$$f(z + z^0) = \sum_{l \in \mathbb{Z}_+^k} f_l z^l, \qquad f_l = f_l(z^0) \in \mathbb{C},$$

можно определить

$$f\big(F(x^0 + \widehat{x}, p^0 + \widehat{p})\big) = \sum_{l \in \mathbb{Z}_+^k} f_l \Phi^l \in \mathcal{QO}^{\mathrm{form}}. \tag{15.2}$$

Так как наблюдаемые $\Phi_1, \dots, \Phi_k$ коммутируют, любой моном $\Phi^l$, $l \in \mathbb{Z}_+^k$, однозначно определен.

Используя мажоранты, легко проверить, что $f\big(F(x^0 + \widehat{x}, p^0 + \widehat{p})\big) \in \mathcal{QO}$.

Если наблюдаемые $F_1, \dots, F_k$ эрмитовы и $f$ вещественно аналитична, возьмем в (15.1), (15.2) $(x^0, p^0) \in D \cap \mathbb{R}^{2n}$:

$$f(F(\widehat{x}, \widehat{p})) = \sum_{l \in \mathbb{Z}_+^k} \mathbf{f}_l F^l,$$

где коэффициенты $\mathbf{f}_l$ вещественны. Имеем $\mathcal{I}(\mathbf{f}_l F^l) = \mathbf{f}_l F^l$, так как $F_j = \mathcal{I}(F_j)$ коммутируют. Итак, $f(F)$ эрмитова в точке $(x^0, p^0)$ и, следовательно, везде в $D$. $\square$

## 16. ТЕОРЕМА ДАРБУ

**Теорема 2.** *Пусть $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{QO}$ — независимые в нуле коммутирующие наблюдаемые*: $[P_j, P_s] = 0$, $1 \le j, s \le n$. *Тогда существует автоморфизм $\mathcal{A} \in \mathrm{Aut}(\mathcal{QO})$ такой, что*

$$\mathcal{A}(P_j) = \widehat{p}_j, \qquad j = 1, \dots, n.$$

**Следствие 16.1** (некоммутативная теорема Дарбу)**.** *Пусть $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{QO}$ — независимые в нуле коммутирующие наблюдаемые. Тогда существуют $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{QO}$ такие, что набор наблюдаемых $X_1, \dots, X_n, P_1, \dots, P_n$ канонический.*

*Более того, предположим, что $\widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_n \in \mathcal{QO}$ — другое дополнение $P_1, \dots, P_n$ до канонического набора. Тогда*

$$\widetilde{X}_j = X_j + \bigl[\widehat{\Phi}(P_1, \dots, P_n, \mathbf{r}), X_j\bigr], \qquad j = 1, \dots, n,$$

*где $\widehat{\Phi} \in \mathcal{QO}$ — аналитическая наблюдаемая, зависящая только от $P$ и $\mathbf{r}$.*

Чтобы показать, что некоммутативная теорема Дарбу (НТД) следует из теоремы 2, мы определим $X_j(\widehat{x}, \widehat{p}) = \mathcal{A}^{-1}(\widehat{x}_j)$. Тогда, очевидно, наблюдаемые $X$, $P$ образуют канонический набор.

Чтобы доказать вторую часть НТД, заметим, что для любого $s = 1, \dots, n$ наблюдаемая $\widetilde{X}_s - X_s$ коммутирует со всеми $P_j$, $j = 1, \dots, n$. Таким образом, $\Phi_s := \widetilde{X}_s - X_s$ зависят от $P$ и $\mathbf{r}$. Остается воспользоваться тем фактом, что набор аналитических наблюдаемых

$$X_1 + \Phi_1(P, \mathbf{r}),\ \dots,\ X_n + \Phi_n(P, \mathbf{r}),\ P_1,\ \dots,\ P_n$$

является каноническим тогда и только тогда, когда $\Phi_j(P, \mathbf{r}) = \bigl[\widehat{\Phi}(P, \mathbf{r}), X_j\bigr]$ для некоторой $\widehat{\Phi} \in \mathcal{QO}$. $\square$

**Замечание 16.1.** Если $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{QO}^{\mathrm{H}}$, то в теореме 2 можно выбрать автоморфизм $\mathcal{A} \in \mathrm{Aut}(\mathcal{QO}^{\mathrm{H}})$.

## 17. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Доказательство основано на быстро сходящейся процедуре типа метода Ньютона. Мы построим автоморфизм $\mathcal{A}$ как предел

$$\mathcal{A} = \lim_{m \to \infty} \mathcal{A}_m, \qquad \mathcal{A}_{m+1} = e^{[\chi_m, \cdot]} \circ \mathcal{A}_m, \qquad m = 0, 1, \dots$$

Автоморфизм $\mathcal{A}_0$ линейный. Он приводит $P_1, \dots, P_n$ к виду

$$\mathcal{A}_0 P_j = \mathrm{const}_j + \widehat{p}_j + P_j^{(0)}, \qquad P_j^{(0)} = O_2(\widehat{x}, \widehat{p}), \qquad P_j^{(0)} \ll \frac{\mu_0 \xi^2}{1 - \lambda_0 \xi}, \qquad j = 1, \dots, n.$$

Далее без ограничения общности мы считаем, что $\mathrm{const}_j = 0$.

Обозначим

$$\mathcal{A}_m P_j = \widehat{p}_j + P_j^{(m)}, \qquad j = 1, \dots, n.$$

Далее мы увидим, что $P_j^{(m)} = O_{2^m+1}(\widehat{x}, \widehat{p})$.

Пусть $\check{P}_j^{(m)}$ — полиномиальная часть $P_j^{(m)}$ степени, меньшей чем $2^{m+1} + 1$:

$$P_j^{(m)} = \check{P}_j^{(m)} + Q_j^{(m)}, \qquad \deg \check{P}_j^{(m)} \le 2^{m+1}, \quad Q_j^{(m)} = O_{2^{m+1}+1}(\widehat{x}, \widehat{p}). \tag{17.1}$$

Определим гамильтониан $\chi_m$ как решение системы

$$[\widehat{p}_j, \chi_m] = \check{P}_j^{(m)}. \tag{17.2}$$

**Лемма 17.1.** *Предположим, что* $P_j^{(m)} = O_{2^m+1}(\widehat{x}, \widehat{p})$, $j = 1, \ldots, n$, *и, более того, для некоторых постоянных* $\mu_m$, $\lambda_m$

$$P_j^{(m)}(\widehat{x}, \widehat{p}) \ll \frac{\mu_m \xi^{2^m+1}}{1 - \lambda_m \xi}, \qquad j = 1, \ldots, n, \quad \xi = x_1 + \ldots + x_n + p_1 + \ldots + p_n.$$

*Тогда*

$$Q_j^{(m)}(\widehat{x}, \widehat{p}) \ll \frac{\mu_m \lambda_m^{2^m} \xi^{2^{m+1}+1}}{1 - \lambda_m \xi} \tag{17.3}$$

*и система* (17.2) *имеет решение* $\chi_m = O_{2^m+2}(\widehat{x}, \widehat{p})$,

$$\chi_m(\widehat{x}, \widehat{p}) \ll \frac{n \mu_m \xi^{2^m+2}}{1 - \lambda_m \xi}. \tag{17.4}$$

Мы докажем лемму 17.1 в приложении E.

**Предложение 17.1.** $P_j^{(m+1)} = U_j^{(m+1)} + V_j^{(m+1)}$, *где*

$$U_j^{(m+1)} = -\frac{1}{0!} Q_j^{(m)} - \frac{1}{1!}\big[\chi_m, Q_j^{(m)}\big] - \frac{1}{2!}\big[\chi_m, \big[\chi_m, Q_j^{(m)}\big]\big] - \ldots,$$

$$V_j^{(m+1)} = \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right)\big[\chi_m, \check{P}_j^{(m)}\big] + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right)\big[\chi_m, \big[\chi_m, \check{P}_j^{(m)}\big]\big] + \ldots$$

**Доказательство.** Имеем

$$\widehat{p}_j + P_j^{(m+1)} = \widehat{p}_j + P_j^{(m)} + \frac{1}{1!}\big[\chi_m, \widehat{p}_j + P_j^{(m)}\big] + \frac{1}{2!}\big[\chi_m, \big[\chi_m, \widehat{p}_j + P_j^{(m)}\big]\big] + \ldots$$

Теперь остается воспользоваться соотношениями (17.1), (17.2). $\square$

**Следствие 17.1.** *Если* $P_j^{(m)} = O_{2^m+1}(\widehat{x}, \widehat{p})$, *то* $P_j^{(m+1)} = O_{2^{m+1}+1}(\widehat{x}, \widehat{p})$.

**Лемма 17.2.** *Для любых* $m \in \mathbb{Z}_+$ *и* $\sigma_m > 0$

$$U_j^{(m+1)} \ll \mu_m \lambda_m^{2^m} \frac{\xi^{2^{m+1}+1}}{1 - A_m - (1+\sigma_m)\lambda_m \xi},$$

$$V_j^{(m+1)} \ll \frac{2n^2 \mu_m^2 (2^m+3)^2 (1+\sigma_m)^3}{\sigma_m^3} \, \frac{\xi^{2^{m+1}+1}}{1 - A_m - (1+\sigma_m)\lambda_m \xi},$$

$$A_m = 6n^2 \mu_m \lambda_m^{-2^m} (2^{m+1}+3) \frac{(1+\sigma_m)^2}{\sigma_m^2}. \tag{17.5}$$

Мы докажем лемму 17.2 в приложении F.

Итак, мы получаем последовательность $A_m$. Ниже мы покажем, что $A_m \le 1/2$ и $A_m \to 0$ при $m \to \infty$. В построении $P_j^{(m)}$ принимают участие три последовательности$\{\mu_m\}$, $\{\lambda_m\}$ и

$\{\sigma_m\}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, где

$$\mu_{m+1} \geq \frac{\mu_m \lambda_m^{2^m}}{1 - A_m} + \frac{2n^2 \mu_m^2 (2^m + 3)^2 (1 + \sigma_m)^3}{\sigma_m^3 (1 - A_m)}, \tag{17.6}$$

$$\lambda_{m+1} = \frac{1 + \sigma_m}{1 - A_m} \lambda_m.$$

Положим

$$\lambda_{-1} = 1, \qquad \mu_m = \mu_0 \lambda_{m-1}^{2^m}, \qquad \sigma_m = \sigma_0 (m + 1) \cdot 2^{-m}.$$

**Предложение 17.2.** *Существуют постоянные $c_\lambda$, $c_\sigma$ такие, что для любых $\lambda_0$, $\sigma_0$, удовлетворяющих условиям*

$$\lambda_0 \geq c_\lambda n^2 (\mu_0 + 1), \qquad \sigma_0 \geq c_\sigma n \sqrt{\mu_0 + 1}, \tag{17.7}$$

*выполнены неравенства* (17.6) *и*

$$A_m \leq 2^{-m-1} \qquad \textit{для любого} \quad m \in \mathbb{Z}_+. \tag{17.8}$$

**Доказательство.** Так как последовательности $\lambda_m$, $\mu_m$, $\sigma_m$ и $A_m$ зафиксированы, мы видим, что (17.6) и (17.8) выполняются при условиях

$$1 \geq 2 \left( \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m} \right)^{2^m} + 4n^2 \mu_0 (2^m + 3)^2 \left( \frac{1 + \sigma_m}{\sigma_m} \right)^3 \left( \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m} \right)^{2^{m+1}},$$

$$1 \geq 6n^2 \mu_0 \cdot 2^{m+2} (2^{m+3} + 3) \left( \frac{1 + \sigma_m}{\sigma_m} \right)^2 \left( \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m} \right)^{2^m}.$$

Легко видеть, что при $m = 0$ эти неравенства выполняются, если $c_\lambda$ достаточно велико, и при $m > 0$, если $c_\sigma$ достаточно велико. $\square$

**Замечание 17.1.** Если наблюдаемые $P_1, \dots, P_n$ в теореме 2 эрмитовы, то автоморфизм $\mathcal{A}$ также может быть выбран эрмитовым.

## 18. КВАНТОВЫЕ НАБЛЮДАЕМЫЕ НАД СИМПЛЕКТИЧЕСКИМ МНОГООБРАЗИЕМ

Пусть $(M, \{\cdot, \cdot\})$ — вещественно аналитическое пуассоново многообразие с невырожденной скобкой Пуассона $\{\cdot, \cdot\}$. Пусть $\mathcal{CO}(M)$ — алгебра Ли аналитических функций на $M$.

Рассмотрим открытое покрытие $M$ координатными окрестностями $V_j$ с каноническими координатами $(x, p)_j$. Пусть $\mathcal{CO}(V_j)$ — алгебра Ли аналитических функций на $V_j$, и пусть $\mathcal{QO}(V_j)$ обозначает алгебру квантовых наблюдаемых над $V_j$. Имеем гомоморфизмы

$$\mathrm{aver}_j \colon \mathcal{QO}(V_j) \mapsto \mathcal{CO}(V_j).$$

Положим для краткости $(x, p) = (x, p)_j$, $(\xi, \eta) = (x, p)_k$. Функции перехода $\tau_{j,k}$,

$$\tau_{j,k}(x, p) = (\xi, \eta),$$

определенные на $V_j \cap V_k$, задают изоморфизмы $T_{j,k} \colon \mathcal{CO}(V_k)\big|_{V_j \cap V_k} \to \mathcal{CO}(V_j)\big|_{V_j \cap V_k}$: для любой функции $f_k = f_k(\xi, \eta) \in \mathcal{CO}(V_k)\big|_{V_j \cap V_k}$

$$f_k \to f_j = T_{j,k} f_j \in \mathcal{CO}(V_j)\big|_{V_j \cap V_k}, \qquad f_j(x, p) = f_k \circ \tau_{j,k}(x, p).$$

Предположим, что для любых $j$, $k$ существует изоморфизм $\widehat{T}_{j,k}\colon \mathcal{QO}(V_k)\big|_{V_j\cap V_k} \to \mathcal{QO}(V_j)\big|_{V_j\cap V_k}$, согласованный с $T_{j,k}$, т.е. диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{QO}(V_k)\big|_{V_j\cap V_k} \arrow[r, "\widehat{T}_{j,k}"] \arrow[d, "\mathrm{aver}_k"'] & \mathcal{QO}(V_j)\big|_{V_j\cap V_k} \arrow[d, "\mathrm{aver}_j"] \\
\mathcal{CO}(V_k)\big|_{V_j\cap V_k} \arrow[r, "T_{j,k}"] & \mathcal{CO}(V_j)\big|_{V_j\cap V_k}
\end{tikzcd}$$

коммутативны. Более того, предположим, что для любых $j$, $k$, $l$ таких, что $V_j\cap V_k\cap V_l\neq\varnothing$, имеем

$$\widehat{T}_{j,k}\circ\widehat{T}_{k,l}\circ\widehat{T}_{l,j}=\mathrm{id}.$$

Тогда эти изоморфизмы определяют алгебру $\mathcal{QO}(M)$, которая называется алгеброй квантовых наблюдаемых над $M$.

Существование таких изоморфизмов $\widehat{T}_{j,k}$ в общей ситуации, по-видимому, нетривиально. Однако имеется несколько простых примеров.

**Пример 1.** Пусть $M$ — кокасательное расслоение $T^*N$, $\dim N=n$, со стандартной пуассоновой структурой. Рассмотрим покрытие $U_j$ многообразия $N$. Тогда $V_j=T^*U_j$ — покрытие $M$. Если $x$ — координаты на $U_j$, имеем канонические координаты $(x,p)$ на $V_j$. В этом случае $\tau_{j,k}$ записываются в виде

$$(\xi,\eta)=\tau_{j,k}(x,p)=\Big(\gamma_{j,k}(x),\big(B^T_{j,k}(x)\big)^{-1}p\Big),\qquad B_{j,k}(x)=\left(\frac{\partial\gamma_{j,k}(x)}{\partial x}\right),$$

где $B^T_{j,k}$ — матрица, транспонированная к $B_{j,k}$. Положим

$$\widehat{T}_{j,k}\big(\widehat{\xi}\big)=\gamma_{j,k}(\widehat{x}),\qquad \widehat{T}_{j,k}(\widehat{\eta})=\frac{1}{2}\Big(\big(B^T_{j,k}(\widehat{x})\big)^{-1}\circ\widehat{p}+\big(\widehat{p}^T\circ B^{-1}_{j,k}(\widehat{x})\big)^T\Big). \tag{18.1}$$

Существует единственный изоморфизм $\widehat{T}_{j,k}\colon \mathcal{QO}(V_k)\big|_{V_j\cap V_k} \to \mathcal{QO}(V_j)\big|_{V_j\cap V_k}$, удовлетворяющий (18.1).

**Пример 2.** Группа $(\mathbb{Z},+)$ действует на алгебре $\mathcal{QO}(\mathbb{R}^n\times D)$, $D\subset\mathbb{R}^n$:

$$l\in\mathbb{Z},\ F\in\mathcal{QO}(\mathbb{R}^n\times D)\ \longrightarrow\ l(F)(\widehat{x},\widehat{p}\,)=F(\widehat{x}+e_jl,\widehat{p}\,),$$

где $e_j$ — $j$-й базисный вектор в $\mathbb{R}^n$. Неподвижные точки этого действия называются наблюдаемыми, $2\pi$-периодическими по $x_j$. Они образуют подалгебру в $\big(\mathcal{QO}(\mathbb{R}^n\times D),\circ,[\cdot,\cdot]\big)$.

Естественно отождествить подалгебру наблюдаемых, $2\pi$-периодических по всем $x_j$, $j=1,\dots,n$, с $\mathcal{QO}(\mathbb{T}^n\times D)$.

## 19. ТЕОРЕМА ЛИУВИЛЛЯ

Пусть $M$ — вещественно аналитическое симплектическое многообразие, $\dim M=2n$, такое, что алгебра $\mathcal{QO}(M)$ определена. Предположим, что $n$ аналитических эрмитовых наблюдаемых $\widehat{F}_1,\dots,\widehat{F}_n\in\mathcal{QO}^{\mathrm{H}}(M)$ таковы, что

$$[\widehat{F}_j,\widehat{F}_k]=0,\qquad 1\le j,k\le n.$$

Тогда вещественно аналитические функции $F_j = \operatorname{aver} \widehat{F}_j$, $j = 1, \dots, n$, образуют коммутативный набор:

$$\{F_j, F_k\} = 0, \qquad 1 \le j, k \le n.$$

Пусть $D \subset M$ — область, на которой определены классические переменные угол–действие

$$(\varphi, I) \in \mathbb{T}^n \times D_0, \qquad D_0 \subset \mathbb{R}^n.$$

Замена переменных

$$\tau\colon\ \mathbb{T}^n \times D_0 \to D, \qquad (\varphi, I) \mapsto (x, p) = \tau(\varphi, I)$$

симплектическая. Поэтому она порождает изоморфизм $a$ алгебр Ли $\mathcal{CO}(D)$ и $\mathcal{CO}(\mathbb{T}^n \times D_0)$:

$$\mathcal{CO}(D) \ni f \mapsto a(f) = f \circ \tau \in \mathcal{CO}(\mathbb{T}^n \times D_0).$$

Рассмотрим алгебру $\mathcal{QO}(\mathbb{T}^n \times D_0)$ с образующими $\widehat{\varphi}$ и $\widehat{I}$.

**Теорема 3.** *Для любой точки $z^0 = \tau(\varphi^0, I^0) \in D$ существуют окрестность $U \subset D_0$ точки $I^0$ и эрмитов изоморфизм*

$$\mathcal{A}\colon \mathcal{QO}(D_\bullet) \to \mathcal{QO}(\mathbb{T}^n \times U), \qquad D_\bullet = \tau(\mathbb{T}^n \times U),$$

*такие, что диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{QO}(D_\bullet) & \xrightarrow{\mathcal{A}} & \mathcal{QO}(\mathbb{T}^n \times D_0) \\ {\scriptstyle\text{aver}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\text{aver}} \\ \mathcal{CO}(D_\bullet) & \xrightarrow{a} & \mathcal{CO}(\mathbb{T}^n \times D_0) \end{array}$$

*коммутативна и*

$$\mathcal{A}(F_j) = \mathcal{F}_j(\widehat{I}, \mathbf{r}), \qquad j = 1, \dots, n. \tag{19.1}$$

**Замечание 19.1.** Наблюдаемые $\widehat{I}_j = \mathcal{A}(\widehat{p}_j)$, $\widehat{\varphi}_j = \mathcal{A}(\widehat{x}_j)$ естественно назвать квантовыми переменными действие–угол.

**Замечание 19.2.** По-видимому, $\mathcal{A}$ всегда можно продолжить до эрмитова изоморфизма $\mathcal{QO}(D)$ и $\mathcal{QO}(\mathbb{T}^n \times D_0)$.

**Доказательство теоремы 3.** Пусть $I_j = \Phi_j(F)$, $j = 1, \dots, n$, — классические действия. Положим $\widehat{J}_j = \Phi_j(\widehat{F}) \in \mathcal{QO}(D)$. Так как наблюдаемые $\widehat{F}$ коммутируют, эти равенства имеют смысл. Очевидно, $J_j := \operatorname{aver} \widehat{J}_j = I_j$ и $\widehat{F}_j$ — функции от $\widehat{J}$:

$$\widehat{F}_j = \mathcal{F}_j^0(\widehat{J}(\widehat{x}, \widehat{p})). \tag{19.2}$$

Пусть $B_0 \subset D$ — шар такой, что согласно некоммутативной теореме Дарбу существует $\widehat{\psi} = \big(\widehat{\psi}_1, \dots, \widehat{\psi}_n\big) \in \mathcal{QO}^{\mathrm{H}}(B_0)$ — дополнение до канонического набора наблюдаемых.

Пусть $\mathcal{A}_0\colon \mathcal{QO}(V_0) \to \mathcal{QO}(B_0)$, $V_0 \subset \mathbb{R}^{2n}_{\psi, J}$, — соответствующий эрмитов изоморфизм:

$$\mathcal{A}_0(\widehat{\psi}_j) = \widehat{x}_j, \qquad \mathcal{A}_0(\widehat{J}_j) = \widehat{p}_j, \qquad j = 1, \dots, n,$$

и $a_0\colon \mathcal{CO}(V_0) \to \mathcal{CO}(B_0)$ — его усреднение: $\operatorname{aver} \circ \mathcal{A}_0 = a_0 \circ \operatorname{aver}$ .

**Лемма 19.1.** *При достаточно малых $t \in \mathbb{R}$ наблюдаемые $\widehat{\psi}_l(\widehat{x},\widehat{p})$ и $e^{t[\widehat{J}_j,\cdot]}\widehat{\psi}_l(\widehat{x},\widehat{p})$ совпадают на $B_0 \cap g^t_{J_j} B_0$, где $g^t_{J_j}\colon D \to D$ — поток гамильтоновой системы с гамильтонианом $J_j$.*

**Доказательство.** Это утверждение становится очевидным в канонических координатах $\widehat{\psi}, \widehat{J}$. $\square$

**Лемма 19.2.** *Для любых $j, l = 1, \dots, n$*

$$a_0\Big(e^{2\pi\{J_j,\cdot\}} J_l\Big) = a_0(J_l), \qquad a_0\Big(e^{2\pi\{J_j,\cdot\}} \psi_l - 2\pi\delta_{lj}\Big) = a_0(\psi_l).$$

**Доказательство.** Эти равенства следуют из определения классических переменных действие–угол. $\square$

**Лемма 19.3.** *Для любых $j, l = 1, \dots, n$*

$$\mathcal{A}_0\Big(e^{2\pi\{\widehat{J}_j,\cdot]}\widehat{J}_l\Big) = \mathcal{A}_0(\widehat{J}_l), \qquad \mathcal{A}_0\Big(e^{2\pi\{\widehat{J}_j,\cdot\}}\widehat{\psi}_l - 2\pi\delta_{lj}\Big) = \mathcal{A}_0(\widehat{\psi}_l + \widehat{\Psi}_{lj}), \tag{19.3}$$

*где для некоторых $\widehat{\Lambda}_j \in \mathcal{QO}(V_0)$, $\widehat{\Lambda}_j = \widehat{\Lambda}_j(\widehat{J}, \mathbf{r})$, имеем*

$$\widehat{\Psi}_{lj} = \mathbf{r} \circ \big[\widehat{\Lambda}_j(\widehat{J}, \mathbf{r}), \widehat{\psi}_l\big]. \tag{19.4}$$

**Доказательство.** Первое равенство (19.3) очевидно. Чтобы доказать (19.4), применяем aver ко второму уравнению (19.3). Согласно лемме 19.2 имеем $\operatorname{aver}\widehat{\Psi}_{lj} = 0$. Теперь равенство (19.4) следует из того факта, что для любого $j = 1, \dots, n$ набор наблюдаемых

$$\widehat{\psi}_l + \widehat{\Psi}_{lj},\ \widehat{J}_l, \qquad l = 1, \dots, n,$$

каноничен. $\square$

Положим

$$\widehat{I}_j := \widehat{J}_j - \frac{1}{2\pi}\mathbf{r} \circ \widehat{\Lambda}_j, \qquad \mathcal{A}_{0j}\Psi\big(\widehat{\psi}, \widehat{J}\big) := \mathcal{A}_0\Psi\big(\widehat{\psi} - 2\pi e_j, \widehat{J}\big), \tag{19.5}$$

где $\Psi \in \mathcal{QO}(V_0)$ — произвольная наблюдаемая и $e_j \in \mathbb{R}^n$ — $j$-й единичный вектор.

**Лемма 19.4.** *Отображения*

$$\mathcal{S}_j := \mathcal{A}_{0j} \circ e^{2\pi[\widehat{I}_j,\cdot]} \circ \mathcal{A}_0^{-1}\colon\ \mathcal{QO}(B_0) \to \mathcal{QO}(B_0)$$

*являются тождественными автоморфизмами.*

**Доказательство.** Достаточно проверить, что $\mathcal{S}_j$ действуют тождественно на каком-нибудь каноническом наборе наблюдаемых в $\mathcal{QO}(B_0)$, например $\widehat{\psi}(\widehat{x},\widehat{p}), \widehat{J}(\widehat{x},\widehat{p})$. Имеем

$$\mathcal{S}_j(\psi_l(\widehat{x},\widehat{p})) = \mathcal{A}_{0j} \circ e^{2\pi[\widehat{I}_j,\cdot]}\psi_l = \mathcal{A}_{0j} \circ e^{-\mathbf{r}\circ[\widehat{\Lambda}_j,\cdot]}\big(\widehat{\psi}_l + 2\pi\delta_{lj} + \widehat{\Psi}_{lj}\big) =$$
$$= \mathcal{A}_{0j}\big(\widehat{\psi}_l - \mathbf{r} \circ \big[\Lambda_j, \widehat{\psi}_l\big] + 2\pi\delta_{lj} + \widehat{\Psi}_{lj}\big) = \mathcal{A}_{0j}\big(\widehat{\psi}_l + 2\pi\delta_{lj}\big) = \widehat{\psi}_l(\widehat{x},\widehat{p}).$$

Здесь второе равенство следует из (19.3), а четвертое — из (19.4).

Равенство $\mathcal{S}_j(\widehat{J}) = \widehat{J}$ очевидно.

Теперь определим $\widehat{\varphi}$, канонически сопряженные к $\widehat{I}$, сначала локально, а затем продолжая с помощью $e^{[\widehat{I},\cdot]}$. Из леммы 19.4 следует периодичность квантовых углов $\widehat{\varphi}$. Равенство (19.1) вытекает из (19.2) и первого равенства (19.5). Теорема 3 доказана. $\square$

**Пример 1** (гармонический осциллятор). В случае $H=\frac{1}{2}(\widehat{p}^2+\widehat{x}^2)$ действие $\widehat{I}=H$, а угол находится из равенства $\widehat{\varphi}=\frac{1}{i}\ln(\widehat{p}-i\widehat{x})$ или $\widehat{\varphi}=-\frac{1}{i}\ln(\widehat{p}+i\widehat{x})$. Эрмитов угол получится, если взять $\widehat{\varphi}=\frac{1}{2i}\big(\ln(\widehat{p}-i\widehat{x})-\ln(\widehat{p}+i\widehat{x})\big)$.

**Пример 2** (разделение переменных). Рассмотрим гамильтониан

$$H=\Phi\big(\widehat{H}_1(\widehat{x}_1,\widehat{p}_1),\dots,\widehat{H}_n(\widehat{x}_n,\widehat{p}_n)\big),$$

где $\Phi$ — некоторые аналитические функции. Такая система очевидно интегрируема по Лиувиллю с $\widehat{F}_j=\widehat{H}_j(\widehat{x}_j,\widehat{p}_j)$. В этом случае говорят, что переменные разделяются.

Другие примеры квантовых систем, интегрируемых по Лиувиллю, можно найти в [3, 7, 8]. Некоторые аналогии между квантовой и классической проблемой интегрируемости обсуждаются в [9, 10].

В переменных действие–угол квантовая динамика выглядит совсем просто. Действительно, рассмотрим уравнение Гейзенберга

$$\dot{\mathcal{F}}=[\mathcal{H},\mathcal{F}],\qquad \mathcal{F}\big|_{t=0}=\mathcal{F}_0,\qquad \mathcal{F}_0,\mathcal{H}\in\mathcal{QO}(\mathbb{T}^n\times D),\quad D\subset\mathbb{R}^n.$$

Предположим, что гамильтониан не зависит от $\widehat{\varphi}$, т.е. $\mathcal{H}=\mathcal{H}(\widehat{I}\,)$.

Определим квантовый вектор частот

$$\omega=(\omega_1,\dots,\omega_n),\qquad \omega_j=D_j\mathcal{H}(\widehat{I}\,),\quad j=1,\dots,n,$$

где $D_j$ — $j$-я частная производная.

Если $\mathcal{F}_0=\widehat{\varphi}_j$, уравнение легко решается: $\mathcal{F}(\widehat{\varphi},\widehat{I},t)=\widehat{\varphi}_j+\omega_j(\widehat{I}\,)t$, так что для любого $\mathcal{F}_0(\widehat{\varphi},\widehat{I}\,)\in\mathcal{QO}(\mathbb{T}^n\times D)$ имеем

$$\mathcal{F}(\widehat{\varphi},\widehat{I},t)=\Phi^t(\mathcal{F}_0)(\widehat{\varphi},\widehat{I}\,),$$

где $\Phi^t=e^{[t\mathcal{H},\cdot]}\colon\mathcal{QO}(\mathbb{T}^n\times D)\to\mathcal{QO}(\mathbb{T}^n\times D)$ — канонический изоморфизм, определенный равенствами $\Phi^t(\widehat{\varphi},\widehat{I}\,)=(\widehat{\varphi}+\omega(\widehat{I}\,)t,\widehat{I}\,)$. Для любого $\mathcal{G}\in\mathcal{QO}(\mathbb{T}^n\times D)$ имеем

$$\Phi^t(\mathcal{G})(\widehat{\varphi},\widehat{I}\,)=\mathcal{G}(\widehat{\varphi}+\omega(\widehat{I}\,)t,\widehat{I}\,).$$

В исходных координатах решение уравнения Гейзенберга

$$\dot{F}=[H,F],\qquad F|_{t=0}=F_0,$$

имеет вид

$$F(\widehat{x},\widehat{p}\,)=\mathcal{A}^{-1}\circ\Phi^t\circ\mathcal{A}(F_0)(\widehat{x},\widehat{p}\,).$$

## 20. СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА

Помимо простой динамики (в терминах решений уравнения Гейзенберга), квантовая интегрируемость по Лиувиллю несет важную информацию о спектре соответствующего оператора Шрёдингера. В этом разделе содержится несколько условных результатов, косвенно подтверждающих этот факт. На традиционном языке некоторые аналогичные утверждения имеются в [4].

Ниже мы сопоставляем $\mathbf{r}$ косоэрмитов оператор $-i\hbar\cdot\mathrm{id}$ на $L_2(\mathbb{R}^n)$.

**Предложение 20.1.** *Предположим, что наблюдаемые $F_1,\dots,F_k,\Phi\in\mathcal{QO}(\mathbb{R}^{2n})$ удовлетворяют равенствам*

$$[F_j,F_l]=0,\qquad [F_j,\Phi]=i\Phi\circ\mu_j(F,i\mathbf{r}).\tag{20.1}$$

*Здесь* $\mu_j\colon \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}$ *— некоторые функции, вещественно аналитические по первым* $k$ *аргументам и гладкие по последнему аргументу. Предположим также, что* $F_1, \dots, F_k$ *и* $\Phi$ *соответствуют операторам на* $L_2(\mathbb{R}^n)$. *Пусть* $\psi \in L_2(\mathbb{R}^n)$ *— собственная функция для* $F_j$:

$$F_j \cdot \psi = \lambda_j \psi, \qquad j = 1, \dots, k, \tag{20.2}$$

*лежащая в области определения оператора* $\Phi$. *Тогда функция* $\varphi := \Phi \cdot \psi$ *лежит в области определения операторов* $F_1, \dots, F_k$ *и*

$$F_j \cdot \varphi = (\lambda_j + \hbar\mu_j(\lambda, \hbar))\, \varphi.$$

**Доказательство.** Прямое вычисление:

$$F_j \cdot \varphi = F_j \circ \Phi \cdot \psi = \Phi \circ F_j \cdot \psi + \mathbf{r} \circ [F_j, \Phi] \cdot \psi = \lambda_j \Phi \cdot \psi + i\mathbf{r} \circ \Phi \circ \mu_j(F, i\mathbf{r}) \cdot \psi =$$
$$= (\lambda_j + \hbar\mu_j(\lambda, \hbar))\varphi. \qquad \square$$

**Предложение 20.2.** *Для любого* $F = F(\widehat{p}, i\mathbf{r}) \in \mathcal{QO}^{\mathrm{form}}$ *и* $k \in \mathbb{C}^n$ *выполняется следующее формальное тождество*:

$$\bigl[F(\widehat{p}, i\mathbf{r}), e^{i\langle k,\widehat{x}\rangle}\bigr] = e^{i\langle k,\widehat{x}\rangle} \circ \frac{F(\widehat{p} + ik\mathbf{r}, i\mathbf{r}) - F(\widehat{p}, i\mathbf{r})}{\mathbf{r}}.$$

**Доказательство.** 1. Случай $F = \widehat{p}_j$ очевиден.

2. Случай $F = \widehat{p}^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$. Индукция по $|\alpha|$ с использованием тождества

$$\bigl[F_1 \circ F_2, e^{i\langle k,\widehat{x}\rangle}\bigr] = \bigl[F_1, e^{i\langle k,\widehat{x}\rangle}\bigr] \circ F_2 + F_1 \circ \bigl[F_2, e^{i\langle k,\widehat{x}\rangle}\bigr] =$$
$$= \bigl[F_1, e^{i\langle k,\widehat{x}\rangle}\bigr] \circ F_2 + \bigl[F_2, e^{i\langle k,\widehat{x}\rangle}\bigr] \circ F_1 + \mathbf{r} \circ \bigl[F_1, \bigl[F_2, e^{i\langle k,\widehat{x}\rangle}\bigr]\bigr]$$

для любых $F_1, F_2 \in \mathcal{QO}^{\mathrm{form}}$.

3. В случае произвольного $F$ пользуемся линейностью. $\square$

Если взять в предложении 20.1 $\Phi = e^{i\langle k,\widehat{x}\rangle}$, получится

**Следствие 20.1.** *Предположим, что система коммутирующих наблюдаемых* $F_1, \dots, F_n$, $[F_j, F_l] = 0$, *допускает глобальные переменные действие–угол* $\widehat{\varphi}, \widehat{I}$:

$$F = \mathcal{F}(\widehat{I}, i\mathbf{r}), \qquad \widehat{I} = \mathcal{M}(F, i\mathbf{r}).$$

*Предположим, что наблюдаемым* $F_1, \dots, F_n$ *и* $e^{i\langle k,\widehat{\varphi}\rangle}$ *соответствуют операторы на* $L_2(\mathbb{R}^n)$. *Пусть* $\psi \in L_2(\mathbb{R}^n)$ *— общая собственная функция для* $F_j$:

$$F_j \cdot \psi = \lambda_j \psi, \qquad j = 1, \dots, n.$$

*Предположим также, что* $\psi_k = e^{i\langle k,\widehat{\varphi}\rangle} \cdot \psi$ *определена и лежит в* $L_2(\mathbb{R}^n)$.

*Тогда*

$$F_j \cdot \psi_k = \mathcal{F}_j\bigl(\mathcal{M}(\lambda, \hbar) + \hbar k, \hbar\bigr)\, \psi_k.$$

**Доказательство.** Действительно, согласно предложению 20.1

$$F_j \cdot \psi_k = (\lambda_j + \hbar\mu_j(\lambda, \hbar))\, \psi_k,$$

где функции $\mu_j(F, i\mathbf{r})$ удовлетворяют равенствам

$$\bigl[F_j, e^{i\langle k,\widehat{\varphi}\rangle}\bigr] = ie^{i\langle k,\widehat{\varphi}\rangle} \circ \mu_j(F, i\mathbf{r}).$$

Согласно предложению 20.2

$$\mu_j(F, i\mathbf{r}) = \frac{\mathcal{F}_j(\widehat{I} + ik\mathbf{r}, i\mathbf{r}) - \mathcal{F}_j(\widehat{I}, i\mathbf{r})}{i\mathbf{r}} = \frac{\mathcal{F}_j(\mathcal{M}(F, i\mathbf{r}) + i\mathbf{r}k, i\mathbf{r}) - F_j}{i\mathbf{r}}.$$

Следовательно, $\hbar\mu_j(\lambda, \hbar) = \mathcal{F}_j(\mathcal{M}(\lambda, \hbar) + \hbar k, \hbar) - \lambda_j$. $\square$

*ПРИЛОЖЕНИЯ*

## А. ФОРМУЛЫ

**А.1. Коммутаторы.** (a) Тождества Якоби:

$$[[F, G], H] + [[G, H], F] + [[H, F], G] = 0, \tag{A.1}$$

$$[(\!(F, G)\!), H] + [(\!(G, H)\!), F] + [(\!(H, F)\!), G] = 0, \tag{A.2}$$

$$(\!([F, G], H)\!) + (\!([G, H], F)\!) + (\!([H, F], G)\!) = 0. \tag{A.3}$$

(b) Тождества Лейбница:

$$[F \circ G, H] = F \circ [G, H] + [F, H] \circ G, \tag{A.4}$$

$$[(\!(F, G)\!), H] = (\!(F, [G, H])\!) + (\!(G, [F, H])\!). \tag{A.5}$$

(c) Правило “бац–цап”:

$$\mathbf{r}^2[F, [G, H]] = (\!((\!(G, F)\!), H)\!) - (\!((\!(H, F)\!), G)\!). \tag{A.6}$$

**А.2. Соотношения $\sim$ и $\approx$.**

**Обозначения.** Пусть $n = 1$. Для любого монома $z = \pi(\widehat{p}^\alpha \circ \widehat{x}^\beta \circ \widehat{p}^\gamma)$ скажем, что $z \overset{\beta}{\sim} u^\gamma v^\alpha$. Аналогично для любого монома $\zeta = \pi(\widehat{x}^\alpha \circ \widehat{p}^\beta \circ \widehat{x}^\gamma)$ напишем $\zeta \overset{\beta}{\approx} \widetilde{u}^\gamma \widetilde{v}^\alpha$.

Если $\alpha + \gamma \le \beta$, то мономы $\pi(\widehat{p}^\alpha \circ \widehat{x}^\beta \circ \widehat{p}^\gamma)$ и $\pi(\widehat{x}^\alpha \circ \widehat{p}^\beta \circ \widehat{x}^\gamma)$ можно считать элементами примитивного базиса, но ниже мы не предполагаем, что это неравенство выполнено.

**Предложение А.1.** *Пусть $n = 1$. Для любых $\alpha, \beta, \gamma \ge 0$ пусть $z = \pi(\widehat{p}^\alpha \circ \widehat{x}^\beta \circ \widehat{p}^\gamma)$ и $\zeta = \pi(\widehat{x}^\alpha \circ \widehat{p}^\beta \circ \widehat{x}^\gamma)$. Тогда*

$$\pi(\widehat{p} \circ z) \overset{\beta+1}{\sim} u^\gamma v^{\alpha+1}, \qquad \pi(\widehat{x} \circ z) \overset{\beta+1}{\sim} \left(1 + \frac{u - v}{\beta + 1}\frac{\partial}{\partial v}\right) u^\gamma v^\alpha, \tag{A.7}$$

$$\pi(\widehat{p} \circ \zeta) \overset{\beta+1}{\approx} \left(1 + \frac{u - v}{\beta + 1}\frac{\partial}{\partial \widetilde{v}}\right) \widetilde{u}^\gamma \widetilde{v}^\alpha, \qquad \pi(\widehat{x} \circ \zeta) \overset{\beta+1}{\approx} \widetilde{u}^\gamma \widetilde{v}^{\alpha+1}, \tag{A.8}$$

$$\pi(\mathbf{r} \circ z) \overset{\beta+1}{\sim} \frac{v - u}{\beta + 1} u^\gamma v^\alpha, \qquad \pi(\mathbf{r} \circ \zeta) \overset{\beta+1}{\approx} \frac{\widetilde{u} - \widetilde{v}}{\beta + 1} \widetilde{u}^\gamma \widetilde{v}^\alpha. \tag{A.9}$$

**Доказательство.** Первое соотношение (А.7) очевидно, а второе следует из тождества

$$\pi(\widehat{x} \circ z) = \pi\bigl(\widehat{p}^\alpha \circ \widehat{x}^{\beta+1} \circ \widehat{p}^\gamma\bigr) + \frac{\alpha}{\beta + 1}\pi\Bigl(\widehat{p}^{\alpha-1} \circ \widehat{x}^{\beta+1} \circ \widehat{p}^{\gamma+1} - \widehat{p}^\alpha \circ \widehat{x}^{\beta+1} \circ \widehat{p}^\gamma\Bigr).$$

Это тождество следует из более простого:

$$(\beta+1)\pi\bigl(\widehat{x}\circ\widehat{p}^{\alpha}\circ x^{\beta}-\widehat{p}^{\alpha}\circ\widehat{x}^{\beta+1}\bigr)=\alpha\pi\bigl(\widehat{p}^{\alpha-1}\circ\widehat{x}^{\beta+1}\circ\widehat{p}-\widehat{p}^{\alpha}\circ\widehat{x}^{\beta+1}\bigr).$$

Чтобы проверить это тождество, достаточно воспользоваться следующими тривиальными равенствами:

$$\pi(\widehat{x}\circ\widehat{p}^{\alpha}-\widehat{p}^{\alpha}\circ\widehat{x})=-\alpha\pi(\widehat{p}^{\alpha-1}),\qquad \pi\bigl(\widehat{x}^{\beta+1}\circ\widehat{p}-\widehat{p}\circ\widehat{x}^{\beta+1}\bigr)=-(\beta+1)\pi(\widehat{x}^{\beta}).$$

Соотношения (A.8) проверяются аналогично, а (A.9) следуют из (A.7) и (A.8). □

**A.3. Формы $\Sigma_{\alpha,\beta}$.** Введем обозначение

$$\Sigma_{\alpha,\beta}:=\sum_{\operatorname{type} z=(\alpha,\beta)}\pi(z).$$

Очевидно,

$$\operatorname{Aver}\Sigma_{\alpha,\beta}=C^{\alpha}_{\alpha+\beta}x^{\alpha}p^{\beta}. \tag{A.10}$$

**Предложение A.2.** *Предположим, что $n=1$. Тогда*

$$\Sigma_{\alpha,\beta}=C^{\beta}_{\alpha+\beta}\cdot 2^{-\beta}\sum_{j=0}^{\beta}C^{j}_{\beta}\,\pi\bigl(\widehat{p}^{j}\circ\widehat{x}^{\alpha}\circ\widehat{p}^{\beta-j}\bigr). \tag{A.11}$$

**Следствие A.1.**

$$\Sigma_{\alpha,\beta}\overset{\alpha}{\sim}C^{\beta}_{\alpha+\beta}\cdot 2^{-\beta}(u+v)^{\beta},\qquad \Sigma_{\alpha,\beta}\overset{\beta}{\approx}C^{\alpha}_{\alpha+\beta}\cdot 2^{-\alpha}(\widetilde{u}+\widetilde{v})^{\alpha}. \tag{A.12}$$

**Доказательство предложения A.2.** Равенство (A.11) очевидно выполняется при $\alpha=0$ или $\beta=0$. Имеем

$$\Sigma_{\alpha,\beta}=\pi(\widehat{x})\circ\Sigma_{\alpha-1,\beta}+\pi(\widehat{p})\circ\Sigma_{\alpha,\beta-1}. \tag{A.13}$$

Используя равенство (A.13) несколько раз, в итоге мы выразим $\Sigma_{\alpha,\beta}$ в терминах $\Sigma_{\alpha_k,\beta_k}$, $k=1,\dots,K$, где для любого $k=1,\dots,K$ имеем $\alpha_k\beta_k=0$. Таким образом, достаточно доказать (A.11), предполагая, что $\Sigma_{\alpha-1,\beta}$ и $\Sigma_{\alpha,\beta-1}$ удовлетворяют (A.11).

Действуя по этому плану, мы вычисляем два слагаемых в правой части (A.13). Согласно предложению A.1

$$\pi(\widehat{x})\circ\Sigma_{\alpha-1,\beta}\overset{\alpha}{\sim}\left(1+\frac{u-v}{\alpha}\frac{\partial}{\partial v}\right)C^{\beta}_{\alpha+\beta-1}\cdot 2^{-\beta}(u+v)^{\beta},$$

$$\pi(\widehat{p})\circ\Sigma_{\alpha,\beta-1}\overset{\alpha}{\sim}C^{\beta-1}_{\alpha+\beta-1}\cdot 2^{1-\beta}v(u+v)^{\beta-1}.$$

Складывая эти соотношения, получаем

$$\pi(\widehat{x})\circ\Sigma_{\alpha-1,\beta}+\pi(\widehat{p})\circ\Sigma_{\alpha,\beta-1}\overset{\alpha}{\sim}C^{\beta}_{\alpha+\beta}\cdot 2^{-\beta}(u+v)^{\beta}.\quad\square$$

**A.4. Формы $\mathbf{r}^l$.**

**Предложение A.3.** *Пусть $n=1$. Тогда*

$$l!\,\mathbf{r}^l=\sum_{j=0}^{l}(-1)^j C_l^j\pi\bigl(\widehat{x}^j\circ\widehat{p}^l\circ\widehat{x}^{l-j}\bigr)=\sum_{j=0}^{l}(-1)^j C_l^j\pi\bigl(\widehat{p}^{l-j}\circ\widehat{x}^l\circ\widehat{p}^j\bigr),$$

$$C_{l+\beta}^{\beta}\,l!\,\pi(\mathbf{r}^l\circ\widehat{p}^{\beta})=\sum_{j=0}^{l}(-1)^j C_l^j\pi\bigl(\widehat{x}^j\circ\widehat{p}^{\beta+l}\circ\widehat{x}^{l-j}\bigr),$$

$$C_{l+\alpha}^{\alpha}\,l!\,\pi(\mathbf{r}^l\circ\widehat{x}^{\alpha})=\sum_{j=0}^{l}(-1)^j C_l^j\pi\bigl(\widehat{p}^{l-j}\circ\widehat{x}^{\alpha+l}\circ\widehat{p}^j\bigr).$$

**Следствие A.2.** $\mathrm{Aver}(l!\,\mathbf{r}^l)=(2xp)^l$.

**Доказательство предложения A.3.** Индукция по $l$ с использованием (A.9). $\square$

**Предложение A.4.** *Пусть $n=1$ и $F\in\pi(\mathbf{F}^{\alpha,\beta})$. Тогда*

$$F=\sum_{j=0}^{\min\{\alpha,\beta\}}f_j\,j!\,\mathbf{r}^j\circ\sigma_{\alpha-j,\beta-j},\qquad \sigma_{k,l}=(C_{k+l}^k)^{-1}\Sigma_{k,l},$$

*где коэффициенты $f_j$ удовлетворяют оценке*

$$|f_j|\le 2^{\alpha+\beta-j}\|F\|.$$

**Доказательство.** Предположим для определенности, что $\alpha\le\beta$. Раскладывая $F$ по примитивному базису, получаем

$$F\overset{\beta}{\approx}\sum_{k=0}^{\alpha}q_k\widetilde{u}^k\widetilde{v}^{\alpha-k},\qquad \|F\|=\sum_{k=0}^{\alpha}|q_k|. \tag{A.14}$$

Согласно предложениям A.1 и A.2

$$F\overset{\beta}{\approx}\sum_{j=0}^{\alpha}\frac{f_j\cdot 2^{j-\alpha}}{C_\beta^j}(\widetilde{u}-\widetilde{v})^j(\widetilde{v}+\widetilde{u})^{\alpha-j}. \tag{A.15}$$

Приравнивая многочлены в правых частях (A.14) и (A.15), получаем оценку

$$|f_j|\cdot 2^{j-\alpha}/C_\beta^j\le 2^{-\alpha}C_\alpha^j\|F\|.$$

Остается использовать неравенства $C_\beta^j\le 2^\beta$, $C_\alpha^j\le 2^\alpha$. $\square$

## B. ПРИМИТИВНЫЕ МОНОМЫ

**B.1. Некоторые тождества.**

**Предложение B.1.** *В случае $n=1$ для любых $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_+$ выполняется тождество*

$$\pi\bigl(\widehat{x}^{\alpha}\circ\widehat{p}^{\alpha+\beta}\circ\widehat{x}^{\beta}\bigr)=\pi\bigl(\widehat{p}^{\beta}\circ\widehat{x}^{\alpha+\beta}\circ\widehat{p}^{\alpha}\bigr). \tag{B.1}$$

**Следствие B.1.** *Множества мономов (5.3) и (5.4) совпадают при $\mu=\nu$.*

**Доказательство предложения В.1.** Во-первых, заметим, что тождество (В.1) эквивалентно следующему:

$$\big[\pi(\widehat{x}^\alpha\circ\widehat{p}^\alpha),\pi(\widehat{p}^\beta\circ\widehat{x}^\beta)\big]=0. \tag{B.2}$$

Это равенство очевидно, если $\alpha=0$ или $\beta=0$. Чтобы доказать (В.2) в общем случае, используем индукцию по $\alpha+\beta$ и тождество

$$\begin{aligned}\big[\pi(\widehat{x}^\alpha\circ\widehat{p}^\alpha),\pi(\widehat{p}^\beta\circ\widehat{x}^\beta)\big]&=\pi(\widehat{x})\circ\big[\pi(\widehat{x}^{\alpha-1}\circ\widehat{p}^{\alpha-1}),\pi(\widehat{p}^\beta\circ\widehat{x}^\beta)\big]\circ\pi(\widehat{p})+\\&+\beta\mathbf{r}\circ\big[\pi(\widehat{x}^\alpha\circ\widehat{p}^\alpha),\pi(\widehat{p}^{\beta-1}\circ\widehat{x}^{\beta-1})\big].\end{aligned} \tag{B.3}$$

Остается доказать (В.3). Согласно тождеству Лейбница

$$\begin{aligned}\big[\pi(\widehat{x}^\alpha\circ\widehat{p}^\alpha),\pi(\widehat{p}^\beta\circ\widehat{x}^\beta)\big]&=\big[\pi(\widehat{x}),\pi(\widehat{p}^\beta\circ\widehat{x}^\beta)\big]\circ\pi(\widehat{x}^{\alpha-1}\circ\widehat{p}^\alpha)+\pi(\widehat{x})\circ\big[\pi(\widehat{x}^{\alpha-1}\circ\widehat{p}^\alpha),\pi(\widehat{p}^\beta\circ\widehat{x}^\beta)\big]=\\&=-\beta\pi\big(\widehat{p}^{\beta-1}\circ\widehat{x}^{\beta+\alpha-1}\circ\widehat{p}^\alpha\big)+\pi(\widehat{x})\circ\big[\pi(\widehat{x}^{\alpha-1}\circ\widehat{p}^{\alpha-1}),\pi(\widehat{p}^\beta\circ\widehat{x}^\beta)\big]\circ\pi(\widehat{p})+\\&\quad+\pi(\widehat{x}^\alpha\circ\widehat{p}^{\alpha-1})\circ\big[\pi(\widehat{p}),\pi(\widehat{p}^\beta\circ\widehat{x}^\beta)\big]=\\&=\pi(\widehat{x})\circ\big[\pi(\widehat{x}^{\alpha-1}\circ\widehat{p}^{\alpha-1}),\pi(\widehat{p}^\beta\circ\widehat{x}^\beta)\big]\circ\pi(\widehat{p})-\\&\quad-\beta\pi\big(\widehat{p}^{\beta-1}\circ\widehat{x}^{\beta+\alpha-1}\circ\widehat{p}^\alpha\big)+\beta\pi\big(\widehat{x}^\alpha\circ\widehat{p}^{\beta+\alpha-1}\circ\widehat{x}^{\beta-1}\big)=\\&=\pi(\widehat{x})\circ\big[\pi(\widehat{x}^{\alpha-1}\circ\widehat{p}^{\alpha-1}),\pi(\widehat{p}^\beta\circ\widehat{x}^\beta)\big]\circ\pi(\widehat{p})+\beta\mathbf{r}\circ\big[\pi(\widehat{x}^\alpha\circ\widehat{p}^\alpha),\pi(\widehat{p}^{\beta-1}\circ\widehat{x}^{\beta-1})\big].\quad\square\end{aligned}$$

**В.2. Доказательство предложения 5.2.** Пусть $z\in\pi(\mathbf{F}^{\alpha,\beta})$, $0\le\alpha\le\beta$, — моном, не принадлежащий списку (5.3). Чтобы показать, что он составной, используем индукцию по $\alpha$. Сначала рассмотрим случай, когда

$$z=\pi(\widehat{p}^\mu\circ\widehat{x}^\nu\circ\widehat{p}^\lambda),\qquad \mu,\nu,\lambda>0,\quad \nu<\mu+\lambda.$$

Если $\nu=1$, $z$ составной согласно очевидному тождеству

$$\pi(\widehat{p}\circ\widehat{x}\circ\widehat{p})=\frac{1}{2}\pi\big(\widehat{p}^2\circ\widehat{x}+\widehat{x}\circ\widehat{p}^2\big). \tag{B.4}$$

Предположим, что $z$ составной при всех положительных $\nu<\nu_0<\mu+\lambda$. Рассмотрим случай $\nu=\nu_0$. Представим $z$ в виде $\pi(\widehat{p}^a\circ\widetilde{z}\circ\widehat{p}^b)$, $a,b\ge0$, так что $\widetilde{z}=\pi(\widehat{p}^{\mu_0}\circ\widehat{x}^{\nu_0}\circ\widehat{p}^{\lambda_0})$, где

$$\mu_0,\lambda_0>0,\qquad \nu_0<\mu_0+\lambda_0\qquad\text{и}\qquad \nu_0>\min\{\mu_0,\lambda_0\}.$$

Пусть для определенности $\nu_0>\mu_0$. Тогда согласно (В.1)

$$\widetilde{z}=\pi\big(\widehat{x}^{\nu_0-\mu_0}\circ\widehat{p}^{\nu_0}\circ\widehat{x}^{\mu_0}\circ\widehat{p}^{\lambda_0+\mu_0-\nu_0}\big).$$

По предположению индукции $\pi(\widehat{p}^{\nu_0}\circ\widehat{x}^{\mu_0}\circ\widehat{p}^{\lambda_0+\mu_0-\nu_0})$ составной. Поэтому $\widetilde{z}$ и $z$ тоже составные.

Теперь рассмотрим общий случай. Имеем

$$z=\pi\big(\widehat{x}^{\alpha_0}\circ\widehat{p}^{\beta_1}\circ\widehat{x}^{\alpha_1}\circ\widehat{p}^{\beta_2}\circ\widehat{x}^{\alpha_2}\circ\ldots\circ\widehat{p}^{\beta_k}\circ\widehat{x}^{\alpha_k}\circ\widehat{p}^{\beta_{k+1}}\circ\widehat{x}^{\alpha_{k+1}}\big)$$

для некоторых положительных $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$, $\beta_1,\ldots,\beta_{k+1}$ и $\alpha_0\ge0$, $\alpha_{k+1}\ge0$,

$$0\le\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\le\sum_{j=1}^{k+1}\beta_j. \tag{B.5}$$

Важно отметить, что $k\ge1$ (иначе $z$ содержится в списке (5.3)).

Заметим, что выполняется по крайней мере одно из следующих неравенств:

$$\alpha_j < \beta_j + \beta_{j+1}, \qquad j = 1, \ldots, k. \tag{B.6}$$

Действительно, если $k > 1$ и все неравенства (B.6) неверны, имеем противоречие с (B.5). В случае $k = 1$ может так случиться, что $\alpha_1 = \beta_1 + \beta_2$. Но в этом случае согласно (B.1) $z = \pi(\widehat{x}^{\beta_2} \circ \widehat{p}^{\alpha_1} \circ \widehat{x}^{\beta_1})$ — один из мономов (5.3).

Предположим, что (B.6) верно при $j = s$. Тогда достаточно доказать, что моном $z_s = \pi(\widehat{p}^{\beta_s} \circ \widehat{x}^{\alpha_s} \circ \widehat{p}^{\beta_{s+1}})$ составной. Таким образом мы свели общий случай к уже рассмотренному выше. $\square$

**B.3. Доказательство предложения 5.3.** Для любого монома $z \in \mathbf{F}^{\mu,\nu}$ его проекция $\pi(z)$ представима в виде линейной комбинации примитивных мономов. Следовательно, $\mathbf{F}^{\mu,\nu}_{\mathrm{prim}}$ порождает векторное пространство $\pi(\mathbf{F}^{\mu,\nu})$. В частности, количество элементов

$$\#\mathbf{F}^{\mu,\nu}_{\mathrm{prim}} \ge \dim \pi(\mathbf{F}^{\mu,\nu}).$$

Чтобы доказать, что векторы из $\mathbf{F}^{\mu,\nu}_{\mathrm{prim}}$ линейно независимы, заметим, что

$$\#\mathbf{F}^{\mu,\nu}_{\mathrm{prim}} \le \text{Количество мономов в (5.5)} = m_1 \cdot \ldots \cdot m_n,$$

где $m_j = \max\{\mu_j, \nu_j\} + 1$. Таким образом, согласно (5.2)

$$\dim \pi(\mathbf{F}^{\mu,\nu}) = m_1 \cdot \ldots \cdot m_n = \#\mathbf{F}^{\mu,\nu}_{\mathrm{prim}}.$$

Отсюда следует, что $\mathbf{F}^{\mu,\nu}_{\mathrm{prim}}$ содержит все мономы (5.5) и образует базис в $\pi(\mathbf{F}^{\mu,\nu})$. $\square$

## C. НЕКОТОРЫЕ МАЖОРАНТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

В этом приложении $\zeta$ и $\xi$ — одномерные комплексные переменные.

**Предложение C.1.** *Для любых* $0 < a < b$

$$\frac{1}{(1 - a\zeta)(1 - b\zeta)} \ll \frac{b}{(b - a)(1 - b\zeta)}. \tag{C.1}$$

**Доказательство** сразу следует из равенства

$$\frac{b}{(b - a)(1 - b\zeta)} = \frac{1}{(1 - a\zeta)(1 - b\zeta)} + \frac{a}{(b - a)(1 - a\zeta)}. \quad \square$$

**Предложение C.2.** *Для любых* $0 < \beta < \alpha$

$$\frac{1 - \alpha\xi - \sqrt{(1 - \alpha\xi)^2 - \beta^2\xi^2}}{\xi^2} \ll \frac{\beta(\alpha + \beta)}{4(1 - (\alpha + \beta)\xi)}.$$

**Доказательство.** Начнем с очевидного равенства

$$1 - \sqrt{1 - \zeta} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k - 3)!!}{(2k)!!}\zeta^k.$$

Теперь ясно, что

$$\frac{1-\alpha\xi-\sqrt{(1-\alpha\xi)^2-\beta^2\xi^2}}{\xi^2}=\frac{1-\alpha\xi}{\xi^2}\left(1-\sqrt{1-\frac{\beta^2\xi^2}{(1-\alpha\xi)^2}}\right)=\frac{1-\alpha\xi}{\xi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}\frac{\beta^{2k}\xi^{2k}}{(1-\alpha\xi)^{2k}}\ll$$

$$\ll\frac{\beta^2}{2(1-\alpha\xi)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\beta^{2k}\xi^{2k}}{(1-\alpha\xi)^{2k}}=\frac{\beta^2(1-\alpha\xi)}{2(1-(\alpha+\beta)\xi)(1-(\alpha-\beta)\xi)}\ll$$

$$\ll\frac{\beta^2}{2(1-(\alpha+\beta)\xi)(1-(\alpha-\beta)\xi)}.$$

Остается воспользоваться оценкой (C.1). □

**Предложение C.3.** *Для любого $k\in\mathbb{N}$ и $\lambda>0$*

$$\frac{\lambda^k\zeta^k}{1-\lambda\zeta}\ll\frac{1}{1-\lambda\zeta}. \tag{C.2}$$

**Доказательство** следует из равенства $1/(1-\lambda\zeta)=1+\lambda\zeta+\lambda^2\zeta^2+\dots$ □

**Предложение C.4.** *Для любых $\alpha,k\in\mathbb{N}$ и $\lambda>0$*

$$\frac{d}{d\zeta}\frac{\zeta^k}{(1-\lambda\zeta)^\alpha}\ll(k+\alpha)\frac{\zeta^{k-1}}{(1-\lambda\zeta)^{\alpha+1}}. \tag{C.3}$$

**Доказательство.** Явное вычисление:

$$\frac{d}{d\zeta}\frac{\zeta^k}{(1-\lambda\zeta)^\alpha}=\frac{k\zeta^{k-1}}{(1-\lambda\zeta)^\alpha}+\frac{\alpha\lambda\zeta^k}{(1-\lambda\zeta)^{\alpha+1}}\ll(k+\alpha)\frac{\zeta^{k-1}}{(1-\lambda\zeta)^{\alpha+1}}.\quad\square$$

**Предложение C.5.** *Для любого $l\in\mathbb{Z}_+$ и постоянных $a,\lambda>0$ рассмотрим последовательность*

$$b_0=\frac{a_0\zeta^{l+1}}{1-\lambda\zeta},\qquad b_{s+1}=a\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{\zeta^2}{1-\lambda\zeta}\right)\frac{db_s}{d\zeta}. \tag{C.4}$$

*Тогда*

$$b_s\ll\frac{a_0s!\,\zeta^{l+1}}{1-\lambda\zeta}\left(\frac{3a(l+3)}{(1-\lambda\zeta)^3}\right)^s. \tag{C.5}$$

*Более того, для некоторого $\sigma>0$ пусть*

$$A=3a(l+3)\frac{(1+\sigma)^2}{\sigma^2}.$$

*Предположим, что $a=a(\sigma)$ настолько мало, что $A<1$. Тогда*

$$\sum_{s=0}^{\infty}\frac{b_s}{s!}\ll\frac{a_0\zeta^{l+1}}{1-A-(1+\sigma)\lambda\zeta}. \tag{C.6}$$

**Доказательство.** Сначала докажем (C.5). Индукция: случай $s=0$ очевиден. Если для некоторого $s\geq0$ (C.5) выполнено, имеем

$$b_{s+1}=a_0\,s!\,a^{s+1}\cdot3^s(l+3)^s\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{\zeta^2}{1-\lambda\zeta}\right)\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{\zeta^{l+1}}{(1-\lambda\zeta)^{3s+1}}\right).$$

Тогда согласно (C.3)

$$b_{s+1} \ll a_0\, s!\, a^{s+1} \cdot 3^{s+1}(l+3)^s(l+3s+2)\frac{\zeta^{l+1}}{(1-\lambda\zeta)^{3s+4}}.$$

Остается воспользоваться очевидным неравенством $l+3s+2<(s+1)(l+3)$.

Теперь докажем (C.6). Согласно предложению C.1 имеем

$$\frac{1}{(1-\lambda\zeta)^3} \ll \frac{1}{1-(1+\sigma)\lambda\zeta}\,\frac{1}{(1-\lambda\zeta)^2} \ll \frac{(1+\sigma)^2}{\sigma^2}\frac{1}{(1-(1+\sigma)\lambda\zeta)^3}.$$

Следовательно,

$$\sum_{s=0}^{\infty}\frac{b_s}{s!} \ll \frac{a_0\zeta^{l+1}}{1-\lambda\zeta}\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{A}{1-(1+\sigma)\lambda\zeta}\right)^s \ll \frac{a_0\zeta^{l+1}}{1-A-(1+\sigma)\lambda\zeta}. \qquad \square$$

## D. ОПЕРАТОРЫ $[\widehat{p}_j,\cdot\,]$ И ИХ ПРАВЫЕ ОБРАТНЫЕ

Для любого $j\in\{1,\dots,n\}$ рассмотрим оператор $[\widehat{p}_j,\cdot\,]\colon \mathcal{QO}\to\mathcal{QO}$.

**Предложение D.1.** *Оператор $[\widehat{p}_j,\cdot\,]$ имеет правый обратный $\mathbf{I}_j\colon \mathcal{QO}\to\mathcal{QO}$:*

$$[\widehat{p}_j,\mathbf{I}_j(\cdot)]=\mathrm{id}_{\mathcal{QO}}$$

*такой, что для любого монома $z\in\mathbf{F}^{\alpha,\beta}$, $(\alpha,\beta)\in\mathbb{Z}_+^{2n}$, имеем*

$$\mathrm{Aver}\,\mathbf{I}_j(\pi(z)) \ll x_j\cdot x^\alpha p^\beta.$$

**Следствие D.1.** *Для любых $F\in\mathcal{QO}$ и $f\in\mathcal{CO}$ таких, что $F(\widehat{x},\widehat{p}\,)\ll f(x,p)$, имеем*

$$\mathbf{I}_jF(\widehat{x},\widehat{p}\,)\ll x_j\cdot f(x,p).$$

**Доказательство предложения D.1.** Достаточно рассмотреть случай, когда $z$ содержит только множители $\widehat{x}_j$ и $\widehat{p}_j$. Поэтому можно положить $n=1$, $(\alpha,\beta)\in\mathbb{Z}_+^2$. Для краткости обозначим

$$\widehat{x}_j=\widehat{x},\qquad \widehat{p}_j=\widehat{p},\qquad \mathbf{I}_j=\mathbf{I}.$$

Можно также считать, что $z\in\mathbf{F}^{\alpha,\beta}_{\mathrm{prim}}$.

Рассмотрим случай $\alpha\ge\beta$. Тогда для некоторого $l\in\{0,\dots,\beta\}$ имеем $z=\widehat{p}^{\,l}\circ\widehat{x}^\alpha\circ\widehat{p}^{\,\beta-l}$. Положим

$$\mathbf{I}(\pi(z))=\frac{1}{\alpha+1}\pi\bigl(\widehat{p}^{\,l}\circ\widehat{x}^{\alpha+1}\circ\widehat{p}^{\,\beta-l}\bigr).$$

Тогда предложение D.1 очевидно выполняется.

Случай $\alpha<\beta$ более сложный. Для некоторого $l\in\{0,\dots,\alpha\}$ имеем $z=\widehat{x}^l\circ\widehat{p}^{\,\beta}\circ\widehat{x}^{\alpha-l}$. Предположим для определенности, что $l\ge\alpha-l$ (случай $l<\alpha-l$ аналогичен). Положим

$$\mathbf{I}_j(\pi(z))=\frac{1}{l+1}\pi(\widehat{x}^{l+1}\circ\widehat{p}^{\,\beta}\circ\widehat{x}^{\alpha-l})-\frac{\alpha-l}{(l+1)(l+2)}\pi(\widehat{x}^{l+2}\circ\widehat{p}^{\,\beta}\circ\widehat{x}^{\alpha-l-1})+$$
$$+\frac{(\alpha-l)(\alpha-l-1)}{(l+1)(l+2)(l+3)}\pi(\widehat{x}^{l+3}\circ\widehat{p}^{\,\beta}\circ\widehat{x}^{\alpha-l-2})-\ldots+\frac{(-1)^{\alpha-l}(\alpha-l)!}{(l+1)(l+2)\ldots(\alpha+1)}\pi(\widehat{x}^{\alpha+1}\circ\widehat{p}^{\,\beta}).$$

Таким образом,

$$\operatorname{Aver}\mathbf{I}(\pi(z)) = \left(1 + \frac{\alpha-l}{l+2} + \frac{(\alpha-l)(\alpha-l-1)}{(l+2)(l+3)} + \ldots + \frac{(\alpha-l)!}{(l+2)\ldots(\alpha+1)}\right)\frac{x^{\alpha+1}p^{\beta}}{l+1} \ll$$
$$\ll x^{\alpha+1}p^{\beta}. \quad \square$$

## E. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 17.1

Оценка (17.3) следует из определения $Q_j^{(m)}$. Теперь построим решение (17.2). Из равенств $\big[\widehat{p}_s + P_s^{(m)}, \widehat{p}_l + P_l^{(m)}\big] = 0$ следует, что

$$\big[\widehat{p}_s, P_l^{(m)}\big] - \big[\widehat{p}_l, P_s^{(m)}\big] = -\big[P_s^{(m)}, P_l^{(m)}\big] = O_{2^{m+1}}(\widehat{x}, \widehat{p}\,), \qquad s, l = 1, \ldots, n.$$

Подставляя в это уравнение $\check{P}_j^{(m)} + Q_j^{(m)}$ вместо $P_j^{(m)}$, получаем

$$\big[\widehat{p}_s, \check{P}_l^{(m)}\big] - \big[\widehat{p}_l, \check{P}_s^{(m)}\big] = O_{2^m+1}(\widehat{x}, \widehat{p}\,) = 0,$$

потому что $\deg\big[\widehat{p}_s, \check{P}_l^{(m)}\big]$ и $\deg\big[\widehat{p}_l, \check{P}_s^{(m)}\big]$ не превосходят $2^m$.

Положим $\chi^{(1)} = \mathbf{I}_1(\check{P}_1^{(m)})$, где оператор $\mathbf{I}_1$ (правый обратный к $[\widehat{p}_1, \cdot\,]$) определен в приложении D. Тогда

$$\big[\widehat{p}_1, \chi^{(1)}\big] = \check{P}_1^{(m)}, \qquad \chi^{(1)} \ll \frac{\mu_m \xi^{2^m+2}}{1-\lambda_m\xi}.$$

Для любого $j = 2, \ldots, n$ наблюдаемая

$$\Phi_j^{(1)} := \check{P}_j^{(m)} - \big[\widehat{p}_j, \chi^{(1)}\big]$$

— многочлен, содержащий лишь слагаемые степеней $2^m+1, 2^m+2, \ldots, 2^{m+1}$. Более того, он не зависит от $\widehat{x}_1$. Действительно,

$$\big[\widehat{p}_1, \Phi_j^{(1)}\big] = \big[\widehat{p}_1, \check{P}_j^{(m)}\big] - \big[\widehat{p}_j, \check{P}_1^{(m)}\big] = 0.$$

На самом деле $\Phi_j^{(1)}$ равен сумме всех слагаемых в $\check{P}_j^{(m)}$, не зависящих от $\widehat{x}_1$.

Положим $\chi^{(2)} = \mathbf{I}_2\big(\Phi_2^{(1)}\big)$. Тогда

$$\big[\widehat{p}_2, \chi^{(1)} + \chi^{(2)}\big] = \check{P}_2^{(m)}, \qquad \chi^{(2)} \ll \frac{\mu_m \xi^{2^m+2}}{1-\lambda_m\xi}$$

и для любого $j = 3, \ldots, n$ наблюдаемая

$$\Phi_j^{(2)} := \check{P}_j^{(m)} - \big[\widehat{p}_j, \chi^{(1)} + \chi^{(2)}\big]$$

— многочлен, содержащий лишь слагаемые степеней $2^m+1, 2^m+2, \ldots, 2^{m+1}$. Более того, он не зависит от $\widehat{x}_1$ и $\widehat{x}_2$. Положим $\chi^{(3)} = \mathbf{I}_3\big(\Phi_3^{(2)}\big)$.

Продолжая аналогично, мы определяем $\chi^{(4)}, \ldots, \chi^{(n)}$. Наконец, положим $\chi_m = \chi^{(1)} + \ldots \ldots + \chi^{(n)}$. $\square$

## F. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 17.2

Имеем

$$Q_j^{(m)} \ll \frac{\mu_m \lambda_m^{2^m} \xi^{2^{m+1}+1}}{1-\lambda_m \xi} = b_0,$$

где $b_0$ определен в (C.4) и

$$\zeta = \xi, \qquad a_0 = \mu_m \lambda_m^{2^m}, \qquad \lambda = \lambda_m, \qquad l = 2^{m+1}.$$

Согласно предложению C.3

$$\chi_m \ll \frac{n\mu_m \xi^{2^m+2}}{1-\lambda_m \xi} \ll \frac{n\mu_m \lambda_m^{-2^m} \xi^2}{1-\lambda_m \xi}.$$

Таким образом,

$$\big[\chi_m, Q_j^{(m)}\big] \ll \left\{\!\!\left\{ \frac{n\mu_m \lambda_m^{-2^m} \xi^2}{1-\lambda_m \xi}, \frac{\mu_m \lambda_m^{2^m} \xi^{2^{m+1}+1}}{1-\lambda_m \xi} \right\}\!\!\right\} \ll 2n \frac{d}{d\xi}\left( \frac{n\mu_m \lambda^{-2^m} \xi^2}{1-\lambda_m \xi} \right) \frac{db_0}{d\xi} \ll b_1,$$

где $b_1$ определен в (C.4) и

$$a = 2n^2 \mu_m \lambda_m^{-2^m}, \qquad k = 2^m. \tag{F.1}$$

Аналогично $\big[\chi_m, \big[\chi_m, Q_j^{(m)}\big]\big] \ll b_2$ и т.д. Итак, согласно предложению C.5

$$U_j^{(m+1)} \ll \sum_{s=0}^{\infty} \frac{b_s}{s!} \ll \frac{\mu_m \lambda_m^{2^m} \xi^{2^{m+1}+1}}{1-A_m-(1+\sigma)\lambda_m \xi}.$$

Теперь оценим $V_j^{(m+1)}$. Имеем

$$\big[\chi_m, \check{P}_j^{(m)}\big] \ll \left\{\!\!\left\{ \frac{n\mu_m \xi^{2^m+2}}{1-\lambda_m \xi}, \frac{\mu_m \xi^{2^m+1}}{1-\lambda_m \xi} \right\}\!\!\right\} \ll 2n^2 \mu_m^2 (2^m+3)(2^m+2) \frac{\xi^{2^m+1}}{(1-\lambda_m \xi)^4} \ll$$

$$\ll 2n^2 \mu_m^2 (2^m+3)^2 \frac{(1+\sigma)^3}{\sigma^3} \frac{\xi^{2^m+1}}{1-(1+\sigma)\lambda_m \xi}.$$

(В последней оценке мы воспользовались предложением C.1.) Следовательно, $\big[\chi_m, \check{P}_j^{(m)}\big] \ll b_0$, где $b_0$ определен в (C.4) и

$$\zeta = \xi, \qquad a_0 = 2n^2 \mu_m^2 (2^m+3)^2 \frac{(1+\sigma)^3}{\sigma^3}, \qquad \lambda = (1+\sigma)\lambda_m, \qquad l = 2^{m+1}.$$

Получаем $\big[\chi_m \big[\chi_m, \check{P}_j^{(m)}\big]\big] \ll b_1$, где $b_1$ определен в (C.4) с $a$ таким же, как и в (F.1). Повторяя рассуждения, приходим к оценке

$$V_j^{(m)} \ll \sum_{s=0}^{\infty} \frac{b_s}{s!} \ll 2n^2 \mu_m^2 (2^m+3)^2 \frac{(1+\sigma)^3}{\sigma^3} \frac{\xi^{2^{m+1}+1}}{1-A_m-(1+\sigma)\lambda_m \xi}. \qquad \square$$

**Благодарности.** Автор благодарит Г. Пифтанкина за полезные обсуждения и за доказательство предложения 13.1.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Abraham R., Marsden J.* Foundations of mechanics. Reading (MA): Benjamin/Cummings, 1978.
2. *Березин Ф.А., Шубин М.А.* Лекции по квантовой механике. М.: Изд-во МГУ, 1972.
3. *Chalykh O.A., Veselov A.P.* Commutative rings of partial differential operators and Lie algebras // Commun. Math. Phys. 1990. V. 126. P. 597–611.
4. *de Verdiere Y.C.* Spectre conjoint d'opérateurs pseudo-differentiels qui commutent. II: Le cas intégrable // Math. Ztschr. 1980. Bd. 171. S. 51–73.
5. *Фаддеев Л.Д., Якубовский О.А.* Лекции по квантовой механике для студентов-математиков. Л.: Изд-во ЛГУ, 1980.
6. *Folland G.* Harmonic analysis in phase space. Princeton: Princeton Univ. Press, 1988.
7. *Hietarinta J.* Pure quantum integrability: E-print, 1997. solv-int/9708010.
8. *Hietarinta J.* Solvability in quantum mechanics and classically superfluous invariants // J. Phys. A: Math. and Gen. 1989. V. 22. P. L143–L147.
9. *Козлов В.В., Трещев Д.В.* Полиномиальные законы сохранения в квантовых системах // ТМФ. 2004. Т. 140, №3. С. 460–479.
10. *Козлов В.В., Трещев Д.В.* Законы сохранения в квантовых системах на торе // ДАН. 2004. Т. 398, №3. С. 314–318.