В. В. Пржиялковский, К. А. Шрамов, О слабых моделях Ландау–Гинзбурга для полных пересечений в грассманианах, *УМН*, 2014, том 69, выпуск 6(420), 181–182

О слабых моделях Ландау–Гинзбурга для полных пересечений в грассманианах

В. В. Пржиялковский, К. А. Шрамов

Распространенный способ строить примеры многомерных многообразий Фано состоит в том, чтобы представить их как полные пересечения в многообразиях с понятной структурой, например в торических многообразиях или грассманианах. Конструкция Гивенталя (см. [5]) описывает модель Ландау–Гинзбурга (ЛГ) полного пересечения в торическом многообразии как полное пересечение в торе с функцией, которую называют суперпотенциалом. В [1] и [2] аналогичный подход применялся для описания моделей ЛГ для полных пересечений в грассманианах. Метод Гивенталя и Батырева строит по торическому многообразию регулярную функцию на торе, т. е. многочлен Лорана.

Пусть $Y=X\cap Y_1\cap\dots\cap Y_l$ – полное пересечение в гладком торическом многообразии X с числом Пикара $\rho(X)=\rho$. Пусть переменные u_i, $1\leqslant i\leqslant N$, соответствуют лучам веера X. Выберем nef-разбиение $E_0,\dots,E_l\subset\{1,\dots,N\}$, соответствующее Y. Пусть R_i – порождающие группы соотношений на лучи веера X, интерпретируемые как мономы от переменных u_i. Зафиксируем параметры q_i, соответствующие симплектической форме на Y. Тогда *модель ЛГ Гивенталя* – это многообразие

$$\Bigl\{R_i=q_i,\ \sum_{s\in E_i}u_s=1,\ 1\leqslant i\leqslant\rho,\ 1\leqslant s\leqslant l\Bigr\}$$

с суперпотенциалом $\sum\limits_{s\in E_0}u_s$. *Интеграл Гивенталя* для Y – это интеграл

$$I_Y=\int_{|u_i|=\varepsilon_i}\frac{1}{(2\pi i)^N}\,\frac{du_1}{u_1}\wedge\dots\wedge\frac{dx_N}{x_N}\,\frac{1}{\prod_{r=1}^{\rho}(R_r-q_r)\cdot\prod_{s=0}^{l}\bigl(1-\sum_{v\in E_s}u_v\bigr)}$$

для некоторых положительных чисел ε_i. Зафиксируем параметры q_i, соответствующие антиканонической форме на Y.

Аналогичным образом в [1] описана модель ЛГ для полного пересечения в грассманиане. Мы приводим формулировки в случае грассманиана плоскостей. Пусть многообразие $Y=G(2,k+2)\cap Y_1\cap\dots\cap Y_l$, $\deg Y_i=d_i$, является полным пересечением Фано. Определим следующие многочлены Лорана на $T=\operatorname{Spec}\mathbb{C}[a_{1,1}^{\pm1},\dots,a_{k,1}^{\pm1},a_{1,2}^{\pm1},\dots,a_{k,2}^{\pm1}]$:

$$F_0=a_{1,1},\qquad F_i=\frac{a_{i+1,1}}{a_i,1}+\frac{a_{i+1,2}}{a_{i,k}}\,,\quad 1\leqslant i\leqslant k-1,\qquad F_k=\sum_{j=1}^{k}\frac{a_{j,2}}{a_{j,1}}\,,\quad F_{k+1}=\frac{1}{a_{k,2}}\,.$$

Определим многочлены Лорана E_s, $1\leqslant s\leqslant l$, как суммы d_s последовательных многочленов F_i, а E_0 как сумму всех незадействованных многочленов F_i. Тогда *стандартная модель ЛГ* для Y – это многообразие $\{E_i=1,\ 1\leqslant i\leqslant l\}\subset T$ с суперпотенциалом E_0.

Теорема 1. *Стандартная модель ЛГ для гладкого полного пересечения Фано Y в грассманиане плоскостей бирациональна тору. В частности, суперпотенциал задается многочленом Лорана f_Y.*

Мы ожидаем, что теорему 1 можно обобщить на случай полных пересечений в произвольных грассманианах.

Пусть f – многочлен Лорана от m переменных $x_1,\dots,x_m$. Интеграл

$$I_f(t)=\int_{|x_i|=\varepsilon_i}\frac{1}{(2\pi i)^m}\,\frac{dx_1}{x_1}\wedge\dots\wedge\frac{dx_m}{x_m}\,\frac{1}{1-tf}\in\mathbb{C}[[t]]$$

Работа выполнена при поддержке РНФ (грант № 14-50-00005).
DOI: 10.4213/rm9632

называется *главным периодом* для f, где ε_i – произвольные положительные числа. Его можно вычислить следующим образом: если ϕ_j – постоянный член многочлена f^j, то $I_f(t) = \sum \phi_j t^j$. Это определение оправдывается следующим "фольклорным" утверждением (см. [8; предложение 2.3] или [4; теорема 3.2]). Пусть P – дифференциальный оператор Пикара–Фукса для пучка гиперповерхностей в торе, заданного многочленом f. Тогда $P[I_f(t)] = 0$.

Предложение 2. *Имеется равенство* $I_Y = I_{f_Y}$.

С каждым многообразием Фано V можно связать *регуляризованный постоянный член I-ряда* $\widetilde{I}_0^V = 1 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots$ (см., например, [5]). Из [2], [3; предложение 3.5] и [7] следует равенство $\widetilde{I}_0^Y = I_Y$. Многочлен Лорана f_Y называется *очень слабой моделью ЛГ* для Y, если $I_{f_Y} = \widetilde{I}_0^Y$.

Следствие 3. *У всякого гладкого полного пересечения Фано в грассманиане плоскостей есть очень слабая модель ЛГ.*

В качестве примера рассмотрим гладкое 4-мерное многообразие Фано Y индекса 2, являющееся пересечением грассманиана $\mathrm{Gr}(2,6)$ с 4 гиперплоскостями. Многочлен Лорана

$$f_Y = \frac{(a_4+a_3)(a_4+a_3+a_2)}{a_3a_2a_1} + \frac{a_4+a_3}{a_3a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + a_4 + a_3 + a_2 + a_1$$

задает очень слабую модель ЛГ для Y. Положим $T = \operatorname{Spec}\mathbb{C}[a_1^{\pm1}, a_2^{\pm1}, a_3^{\pm1}, a_4^{\pm1}] \cong (\mathbb{C}^*)^4$. Рассмотрим "наивную" относительную компактификацию семейства $f_Y\colon T \to \mathbb{A}^1$, заданную вложением тора T в проективное пространство $\mathbb{P}^4$ с однородными координатами $a_0,\dots,a_4$. Это семейство особых компактных трехмерных многообразий Калаби–Яу. Его тотальное пространство имеет крепантное разрешение $LG(Y)$. Можно проверить, что $LG(Y)$ является семейством трехмерных многообразий Калаби–Яу с гладким общим слоем и 12 особыми слоями. Каждый из них имеет единственную особую точку, и она является обыкновенной двойной особенностью. Мы ожидаем, что $LG(Y)$ удовлетворяет гипотезе Гомологической Зеркальной Симметрии (ГЗС). Структура особых слоев $LG(Y)$ подтверждает это ожидание. А именно, по [6; следствие 10.3] на Y есть полный исключительный набор длины 12. С другой стороны, по гипотезе ГЗС категория $\mathscr{D}^b(Y)$ эквивалентна категории Фукаи–Зайделя двойственной модели ЛГ.

Мы благодарны А. Хардеру и А. Г. Кузнецову за полезные обсуждения.

Список литературы

[**1**] V. V. Batyrev, I. Ciocan-Fontanine, B. Kim, D. van Straten, *Nuclear Phys. B*, **514**:3 (1998), 640–666. [**2**] V. V. Batyrev, I. Ciocan-Fontanine, B. Kim, D. van Straten, *Acta Math.*, **184**:1 (2000), 1–39. [**3**] A. Bertram, I. Ciocan-Fontanine, B. Kim, *Duke Math. J.*, **126**:1 (2005), 101–136. [**4**] T. Coates, A. Corti, S. Galkin, V. Golyshev, A. Kasprzyk, *European Congress of Mathematics* (Kraków, 2–7 July, 2012), EMS Publ. House, Zürich, 2014, 285–300; 2012, 16 pp., arXiv: 1212.1722. [**5**] A. Givental, *Topological field theory, primitive forms and related topics* (Kyoto, 1996), Progr. Math., **160**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1998, 141–175. [**6**] A. Kuznetsov, *Homological projective duality for Grassmannians of lines*, 2006, 36 pp., arXiv: math/0610957. [**7**] R. Marsh, K. Rietsch, *The B-model connection and mirror symmetry for Grassmannians*, 2013, 30 pp., arXiv: 1307.1085. [**8**] V. Przyjalkowski, *Commun. Number Theory Phys.*, **1**:4 (2007), 713–728.

В. В. Пржиялковский (V. V. Przyjalkowski)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: victorprz@mi.ras.ru

К. А. Шрамов (C. A. Shramov)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: costya.shramov@gmail.com

Представлено Д. О. Орловым
Принято редколлегией
29.09.2014