Экспертное заключение
на учебник Г.К. и О.В. Муравиных
“Алгебра и начала анализа” 11 класс
(изд-во "Дрофа")

Это уже седьмой, завершающий учебник авторского коллектива Муравиных, который мне пришлось рецензировать. Как и в предыдущих шести учебниках, данные авторы демонстрируют стабильную неспособность правильно решать свои собственные задачи. На первых 85 страницах материала, то есть в первых 216 задачах я обнаружил 28 несомненных ошибок (они отмечены ниже полужирным шрифтом), итого более чем по одной ошибке на каждые 8 задач.

Недопустимым является обыкновение авторов учебника не давать точных определений, а работать с понятиями на интуитивном уровне, так что учащимся приходится самостоятельно догадываться о смысле тех или иных понятий. Это необходимо должно приводить к многочисленным недоразумениям и ошибкам учащихся, и, более того, приводит и к путанице в самом учебнике: см., например, понятие разрыва функции.

Авторы из раза в раз провозглашают во введении к учебнику, что знать математику – это значит уметь решать задачи. Как видим, сами они умеют это катастрофически плохо. А люди, плохо знающие предмет, ни за что не напишут хороший учебник. Разумеется, если издательство проявит настойчивость и заставит нас выловить все ошибки и несуразности в тексте, в исправлениях, в исправлениях исправлений и т.д., то рано или поздно процесс сойдется и эти учебники прорвутся в школу. Эта настойчивость заслуживает лучшего применения. Я очень хотел бы, чтобы руководители издательства “Дрофа” разобрались с тем, кто и когда посоветовал им гг. Муравиных в качестве возможных авторов учебников по математике для средней школы. На мой взгляд, это печальное недоразумение.

В качестве чистой формальности констатирую, что **и этот учебник также не соответствует современным научным представлениям.**

Список замечаний

1. Стр. 5, строки 8–7 снизу. “Если ответы разные, вероятно, что кто-то из нас ошибся”. Во-первых, почему всего лишь “вероятно”? Во-вторых, это утверждение бессодержательно, а настоящая цель его включения в текст — создать успокоительно-толерантное отношение к ошибкам, которое в математике абсолютно недопустимо. Наконец, здесь недопустимо эмоциональное уравнивание ответственности

между школьником и авторами учебника, претендующего на включение в федеральный список. Нужно примерно так: "либо Вы ошиблись, либо мы – неквалифицированные и недобросовестные работники, занимающиеся не своим делом".

2. Стр. 10, строка 9. Запятая после "любое" не нужна.

3. Стр. 10, строка 16. 1823 год – это не середина века.

4. Стр. 10, строки 4-3 снизу основного текста. Высказанное здесь утверждение о том, что доказательство непрерывности любой из элементарных функций значительно сложнее, неверно. Например, для константы это доказательство даже проще.

5. Стр. 11, строки 13–10 снизу. Непонятно, является это высказывание общим, или относится только к примеру на рис. 5. С одной стороны, заключительное замечание "в частности, на рис. 5..." указывает на то, что это общее утверждение, а рис. 5 – только иллюстрация. Но в общем случае это утверждение может и не быть верным: во-первых, функция может быть разрывной только справа, но не слева, а во-вторых даже если она разрывна слева, то указанная разность может оказаться не больше некоторого положительного числа, а наоборот, меньше некоторого отрицательного.

6. **Стр. 12, строки 1–3. Во-первых, построение фразы "в отличие от" создает у читателя ошибочное впечатление, что имеется альтернатива: либо разрыв бесконечный (что бы это ни означало), либо устранимый. Во-вторых, определение разрыва нигде ранее не давалось, что приводит к систематическому недоразумению во многих последующих задачах этого раздела. Естественно предположить, что разрыв – это отрицание непрерывности в соответствующей точке. Но в соответствии с определением на стр. 10 вопрос о непрерывности (а следовательно и об ее отсутствии) вообще можно ставить только для точек из области определения функции. В этом случае ни точка 0 в случае функции $\frac{1}{x}$, ни точка 1 в случае функции $\frac{x^2-1}{x-1}$ вообще не являются точками разрыва. Единственная альтернатива (неудобство которой также очевидно) – объявить точками разрыва, помимо прочего, все точки, где функция не определена. Но какой-то выбор сделать надо.**

7. **Стр. 12, строка 5. Утверждение неверно: указанная функция не имеет разрыва в этой точке. Судя по контексту, авторы сами не смогли придумать никакого определения разрыва, при которой это их утверждение оказалось бы логически согласованным с остальным текстом, и именно поэтому вообще его не приводят, оставляя читателя работать с неопределенным интуитивным понятием, что постоянно приводит к недоразумению. Соответственно, необходимо привести в порядок замечание в строках 7–8 на стр. 18 (после определения предела).**

8. **Стр. 12, задачи 1(б), (г). Вот яркий пример вышесказанного. Невозможно придумать никакого логичного и приемлемого определения, при котором функция $5x + \frac{1}{x}$ оказалась бы разрывной в точке 0, а функция $3^x + \lg x$ – непрерывной (как это утверждается в списке ответов). Если на это возразить, что точка 0 не входит в область определения логарифма, то ведь она точно так же не входит и в область определения функции $\frac{1}{x}$. См. также пункты (в) и (д) этой задачи.**

9. Стр. 27, пример 3. Не было определения вертикальной асимптоты.

10. **Стр. 30, задача 40(г). Ответ 1 неверен. Верный ответ: 1 при $x \to +\infty$ и -1 при $x \to -\infty$.**

11. **Стр. 31, задача 43(2). Ответ неверен: пропущен случай (г).**

12. Стр. 31, задача 45(а). Как можно угадать этот ответ, если ранее слова "бесконечный разрыв" точно не определялись?

13. Стр. 35, последний абзац. Это высказывание бессмысленно, если не уточнить, графики каких функций здесь обсуждаются. Например, если под функцией понимать совершенно произвольное отображение $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ или даже совершенно произвольное непрерывное отображение $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, то утверждение неверно: в пространстве всех непрерывных функций почти все функции не имеют производной ни в одной точке.

14. Стр. 40, строки 3–4. Совершенно непонятно, как введение специального обозначения Δx помогает справиться с этим затруднением (и как вообще введение каких бы то ни было условных значков может

помочь справиться с какой бы то ни было содержательной проблемой). Как мы видим далее, оно позволяет лишь переписать сомнительное выражение $\frac{y-y_0}{x-x_0}$ в новом виде $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, который однако подвержен тем же недостаткам.

15. Стр. 40, строка 3 снизу. Здесь нужно уточнить, что следующее равенство относится именно к уравнению (или графику) касательной. Например, просто вставить слова "для нее" после "значит," .

16. Стр. 46, задача 72(б). В чем смысл такого ответа к данной задаче? (В задаче спрашивается, является ли функция $6x^2 - 6x$ производной некоторой другой функции, и в ответе вместо "да" или "нет" написана опять эта же самая функция $6x^2 - 6x$.)

17. **Стр. 47, задача 75(а). Ответ неверен. У данной задачи только одно решение $y = 2$.**

18. **Стр. 47, задача 75(б). Ответ неверен. Пропущено второе решение $\frac{-9x+17}{8}$. Можно подумать, что именно этот второй ответ "перескочил" в ответ к задаче (а), поскольку приведенный там дополнительный ответ отличается от пропущенного здесь лишь одной цифрой, что для данных авторов — ошибка сравнительно несущественная.**

19. **Стр. 47, задача 76(2а). Ответ $y = 12x + 15$ и $y = 12x - 30$ неверный. Верный ответ $y = 12x - 18$ и $y = 12x + 9$.**

20. **Стр. 47, задача 77(г). Ответ $-\frac{1}{2}x - 2\frac{15}{16}$ неверный. Верный ответ $-\frac{1}{2}x + 2\frac{15}{16}$.**

21. Стр. 49. В 4-м абзаце написано:

    1) при $f'(x_0) > 0$... точки графика слева от точки касания расположены ниже, а справа — выше этой точки.

    2) при $f'(x_0) < 0$... точки графика слева от точки касания расположены выше, а справа — ниже этой точки.

    В следующем абзаце ссылка на это обстоятельство выглядит так:

    "В первом случае точку x_0 называют точкой возрастания функции, а во втором – точкой убывания функции".

Совершенно естественно, что слова "в первом случае" и "во втором случае" следует относить к описанию ситуации (то есть к утверждению $f'(x_0) > 0$ или $f'(x_0) < 0$), а не к ее следствию. Разумеется, ученик так и поймет, и будет совершенно запутан, поскольку авторы относят эти слова именно к следствию, т.е. к высказываниям "точки графика слева от точки касания расположены ниже, а справа — выше этой точки" и "точки графика слева от точки касания расположены выше, а справа — ниже этой точки".

22. **Стр. 53, таблица и абзац перед ней. Необходимо точное определение значков $\smile$ и $\frown$. Без этого невозможно ответить, например, на вопросы задачи 94 (которая тем самым оказывается некорректно сформулированной).**

23. Стр. 54, Пример 3. В условии необходимо вставить "график какой-нибудь функции $f(x)$ такой, что". Иначе получается, что обсуждается какая-то существующая функция, про которую мы знаем лишь такие-то сведения, и на их основании мы пытаемся восстановить функцию. Но в задаче с таким условием верный ответ может быть только один, в отличие от данной задачи. Примерно то же относится к задаче 89.

24. Стр. 57. Последние 4 строки продублированы на следующей странице!!

25. **Стр. 58, задача 95(3). Эта задача не имеет решения! Действительно, здесь требуется построить <u>непрерывную</u> функцию $f(x)$, про которую, помимо прочего, известно, что ее производная на интервале $(-5, -1)$ отрицательна, а точки -4 и -1 являются ее нулями. Очевидно, что таких функций не бывает.**

26. **Стр. 58–59. Задача 100 имеет только пункты (в) и (г), но не имеет пунктов (а) и (б).**

27. **Стр. 59, задача 101(2). В задаче необходимо указать, какой класс функций рассматривается. Например, если взять какое попало разрывное отображение $\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ и продолжить его по четности на левую полуось, то у него почти наверняка вообще не будет ни одной точки экстремума. Это – ответ на решение задачи, но хорош ли он? Если же рассматривать**

хоть сколько-нибудь разумные функции, например непрерывные, то ответ неудовлетворителен, поскольку еще остается построить хоть одну четную непрерывную функцию, у которой число точек экстремума конечно, но не включает точку 0. Это – задача несравненно более сложная, чем указанное в учебнике "решение". Поэтому данное здесь “решение” не засчитывается.

28. Стр. 62, последний абзац. Принцип индукции здесь приведен в “урезанном” варианте. Полный вариант таков: “из того, что утверждение верно для всех натуральных i, не превосходящих k, следует, что оно верно и для $k + 1$”. В математике есть много теорем, доказанных при помощи этой формулировки, причем только урезанного варианта было бы недостаточно. Кроме того, иногда основанием индукции является не единица, а какое-нибудь другое значение (и теорема тогда доказывается для всех значений, не меньших этого).

29. **Стр. 67, задача 118(а). Ответ “нет” неверен. Верный ответ “да”.**

30. Стр. 68, задача 125. Что такое точка А? Вероятно, это точка, упоминаемая на стр. 28 много после указанного построения. Почему ученик должен заниматься этими поисками и догадками?

31. **Стр. 68, задача 126(а). Ответ, приведенный на рис. 125(а), абсолютно неудовлетворителен. Указанная на нем функция всюду имеет положительную производную, хотя функция из условия задачи имеет нулевую производную при $x = 1$. Указанная на нем функция имеет перегиб при $x = 0$, хотя функция из условия имеет перегиб опять-таки при $x = 1$. Указанная на нем функция имеет нуль на интервале $(-3, -2)$, тогда как функция из условия – на интервале $(-1, 0)$ (!). Наконец, указанная на нем функция при $x = 0$ принимает значение примерно 4,5, тогда как функция из условия – ровно 4.**

32. **Стр. 68, задача 126(г). График, приведенный на рис. 125, неудовлетворителен: он дает асимптотическое направление с угловым коэффициентом около $-\frac{1}{2}$, тогда как правильное значение -3.**

33. Стр. 69, строка 4 снизу. Нужны какие-то слова, указывающие на то, что так говорят именно в данном случае (когда берется композиция

ровно 4 функций, обозначенных так-то и так-то), а не всегда, когда возникает сложная функция. Конечно, читатель без труда разберется, что имеется в виду, но нельзя приучать учеников к допустимости некорректных высказываний.

34. **Стр. 72, задача 135. Ответ "первая" неверный. Производная первой функции в точке 1 авторами вычислена верно и действительно равна $\frac{5}{6}$. Но производная последней функции** $((2x-12)^2(x^2+1))$ **равна** $4(x^4-12x^3+37x^2-12x+36)' = 4(4x^3-36x^2+74x-12)$, **что при** $x=1$ **равно** 120, **то есть несколько больше, чем** $\frac{5}{6}$**.**

35. **Стр. 72, задача 138. Ответ** $8 \pm 2\sqrt{14}$ **неверный. Верный ответ** $\frac{8\pm\sqrt{14}}{2}$**.**

36. **Стр. 73, задача 139(а). Ответ** $y_{max} = 5^5, y_{min} = -22^5$ **неверный. Верный ответ** $y_{max} = 18^5, y_{min} = -9^5$.

37. **Стр. 73, задача 140(г). Ответ неверный. Верный ответ отличается знаком.**

38. **Стр. 73, задача 141(е). Ответ** $-\frac{11}{3}x + \frac{13}{2}$ **неверный. Верный ответ** $-\frac{11}{4}x + \frac{13}{2}$**.**

39. Стр. 73, задача 143(б). Чертеж на рис. 126 некачественный: он имеет максимум не в точке $x = 2$, а несколько раньше.

40. Стр. 75, строки 1–5. Будут ли какие-то слова о совпадении всех трех определений (через производную в нуле, основание логарифмов и предел последовательности)?

41. **Стр. 80, задача 148. Ответ** $-0,25 + \ln\frac{1}{\sqrt{2}}$ **неверный. Действительно, производная функции** $2t^{2-t}$ **равна**

$$\left(2e^{\ln t(2-t)}\right)' = 2\left(e^{\ln t(2-t)}\right)\left(\frac{2-t}{t} - \ln t\right) = 2t^{2-t}\left(\frac{2-t}{t} - \ln t\right),$$

что при $t = 4$ **равно** $\frac{2}{16}(-\frac{1}{2} - 2\ln 2) = -\frac{1}{16} - \frac{1}{4}\ln 2$. **С другой стороны, сводя авторский ответ к логарифму двойки, имеем** $-0,25+\ln\frac{1}{\sqrt{2}} \equiv -\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$**: тоже два отрицательных слагаемых, из которых первое по абсолютной величине в 4 раза больше нашего, а второе – в два раза.**

42. **Стр. 81, задача 152(а). Ответ $\frac{1}{2}\left((-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{7} + \pi n\right)$ неверный. Действительно, $\left(8\cos\left(2x + \frac{\pi}{7}\right)\right)' = -16\sin\left(2x + \frac{\pi}{7}\right)$, что равно нулю если и только если $2x + \frac{\pi}{7} = \pi k$, откуда $x = \frac{1}{2}(-\frac{\pi}{7} + \pi n)$.**

43. **Стр. 81, задача 154(г). Ответ $\frac{3}{2}x + 1 - \frac{3\pi}{8}$ неверный. Верный ответ $\frac{2}{3}x + 1 - \frac{\pi}{6}$.**

44. **Стр. 84, задача 179(а). Ответ $\frac{\pi}{3} + \pi n$ неверный. Верный ответ $\frac{\pi}{12} + \pi n$.**

45. **Стр. 84, задача 179(в). Ответ “для всех x” неверный. Например, при $x = 0$ $(\mathbf{tg}\ x)' = 1 < 3 = (3x + 8)'$.**

46. **Стр. 84, задача 179(г). Ответ $\left[\pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right]$ неверный. Верный ответ $\left[-\frac{3\pi}{4} + \pi n; \pi n\right]$.**

47. **Стр. 89, задача 189. Ответ $\left(\frac{4}{3}; \frac{4}{9}\right)$ неверный. Верный ответ $\left(\frac{2}{3}; \frac{16}{9}\right)$.**

48. **Стр. 90, задача 205. Ответ $d = \frac{2\sqrt{31}+23}{15}$ неверный. Верный ответ $d = 2,4$ (и, соответственно, $a_1 = -9$). Действительно, с помощью калькулятора легко проверить, что указанная в учебнике разность прогрессии приблизительно равна $2,276$, а значение максимизируемого произведения $9,425$. При нашем же ответе это произведение вычисляется точно и равно $\frac{7^3}{5^2} = 9,72$.**

49. Стр. 90, задача 205. Непонятно, зачем нужно условие, что разность больше 1. У разности (рассматриваемой как аргумент максимизируемой функции) есть только две критических точки: 1 и $2,4$. Но значение 1 дает отрицательное значение рассматриваемой функции и поэтому отбрасывается основным вопросом задачи.

50. **Стр. 91, задача 210. Ответ “высота равна диаметру основания” неверный. Верный ответ “высота равна радиусу основания”.**

51. Стр. 91, задача 213. Решения по возможности следует давать, избегая аркфункций. В данном случае такая возможность имеется: $L_{max} = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$.

52. Стр. 179, ответ к задаче 67. Образное выражение “как бы наматываться на асимптоту” непонятно.

Содержание учебника не соответствует современным научным представлениям.

В.А.Васильев